



VIII Jornada Nacional de
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
XXI Jornada Regional de
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Educação Matemática: identidade
em tempos de mudança
06 a 08 de maio de 2020



APRENDENDO AS PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO DE PASCAL ATRAVÉS DE ATIVIDADES DINÂMICAS

Lucas Decaro dos Santos da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - USP
lucdec@ime.usp.br

Silvia Nagib Elian
Instituto de Matemática e Estatística - USP
selian@ime.usp.br

Eixo Temático: Pesquisa em Educação Matemática

Modalidade: Comunicação Científica (CC)

Resumo

Este artigo tem como objetivos expor a aplicação de uma atividade dinâmica, desenhada no PowerPoint, sobre o Triângulo de Pascal e apresentar seus resultados. O entendimento do Triângulo de Pascal e suas propriedades serve como ferramenta para a compreensão de outros tópicos importantes na formação dos estudantes, como o Binômio de Newton e o cálculo de probabilidades, daí o interesse de encontrar meios e ferramentas para o ensino deste conteúdo. A atividade foi aplicada a 26 estudantes do segundo ano do Ensino Médio de São Paulo de forma remota. Apresentamos um estudo estatístico descritivo dos resultados e aplicamos o método de cluster, que nos permitem avaliar e identificar as principais dificuldades dos estudantes, tanto do ponto de vista teórico quanto prático e propor estratégias para a melhoria do ensino neste tópico.

Palavras-chave: Atividade dinâmica. Avaliação. Cluster. Tecnologia. Triângulo de Pascal.

1 Introdução

O conteúdo de Triângulo Pascal é muitas vezes negligenciado à aprendizagem dos alunos. Diante disso, Souza (2019) afirma que há necessidade de desmistificar a ideia de que o tema Triângulo de Pascal pode ser excluído do currículo escolar por ser considerado por muitos educadores desconexo de outras áreas do conhecimento.

O uso de tecnologias no ensino de Matemática pode possibilitar ao aluno a construção de um conhecimento mais significativo, mas para que isso aconteça, o professor precisa ter o conhecimento pleno do recurso computacional, pois a tecnologia pode ser um avanço na aprendizagem se souber utilizá-la de forma adequada e consciente.

Entende-se por tecnologia, primeiramente, como a compreensão de dispositivos (aparelhos) que utilizam os avanços tecnológicos para oferecer uma maior funcionalidade. Em segundo lugar, deve-se entender a tecnologia como algo imaterial, mas que se materializa como conhecimento através de aparelhos que aproveitam e estendem este conhecimento.

O objetivo da utilização de novas tecnologias no ensino de Matemática é visar uma aprendizagem eficaz e conduzir os alunos a transformarem as informações obtidas por meio de recursos ou ferramentas tecnológicas em conhecimentos que favoreçam o desenvolvimento desses alunos na disciplina.

O presente estudo enquadra-se na seguinte linha de pesquisa especificada pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática no IME (Instituto de Matemática e Estatística) da Universidade de São Paulo: *O uso de animações digitais para aprendizagem das propriedades do Triângulo Pascal*, desenvolvido por Lucas D. S. Silva, orientado por Silvia N. Elian.

Nessa pesquisa, foi abordado o uso de tecnologias digitais, em específico o uso do PowerPoint, que integra um dos pacotes do Microsoft Office, como uma das alternativas que pode contribuir no processo educacional, buscando responder à questão: O uso de animações no PowerPoint no ensino de Triângulo Pascal numa turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de São Paulo viabiliza uma aprendizagem com significado para os alunos?

O objetivo desta pesquisa é estudar como o uso da tecnologia auxilia a aprendizagem dos alunos do segundo ano do Ensino Médio sobre o Triângulo de Pascal. Os objetivos específicos são construir atividades dinâmicas por meio de animações sobre esse tópico e avaliar o entendimento das propriedades do Triângulo Pascal, dado que este é um caminho para abordar Binômio de Newton, que é um conteúdo muito importante para formação dos estudantes.

Devido à pandemia da COVID-19, e em função do Decreto Estadual, todas as escolas foram fechadas sendo as atividades realizadas de modo síncrono, através do Google Meet, usando PowerPoint, que foi enviado para o e-mail dos estudantes com as animações e atividades. A escolha por utilizar o PowerPoint para animações e atividades deve-se à facilidade de acesso e também à fácil execução pelos alunos, sem necessidade de conhecimento computacional prévio para realizar as atividades.

2 Abordagem metodológica

A aplicação da presente pesquisa foi realizada em uma escola pública de São Paulo, com uma turma de 33 alunos do segundo ano do Ensino Médio, sendo que 26 desses alunos tinham disponíveis os equipamentos necessários (notebook ou computador, programa PowerPoint da

empresa Microsoft e acesso a internet) para realização da atividade, por meio do Google Meet de forma síncrona.

Este estudo foi planejado com base em uma estratégia de pesquisa qualitativa, de caráter exploratório, através das atividades dinâmicas com animações que serão aplicadas em etapas para os estudantes da Educação Básica.

Como a atividade de pesquisa é empreendida no intuito de descobrir e construir novos conhecimentos, para tal é necessário desenhar ou projetar o caminho a ser seguido, uma vez que cada caminho poderá levar o investigador a alcançar diferentes resultados, devendo-se assim avaliar as restrições e oportunidades colocadas pelo contexto dentro do qual se pretende trabalhar.

3 Tecnologia na Educação

Hoje vivemos em um cenário dominado pelos modernos meios tecnológicos, liderados pela Internet que imprimiu agilidade e acesso instantâneo à informação. Segundo Pretto (2002) a velocidade com que o mundo está se transformando exerce uma influência direta no conjunto de valores da sociedade contemporânea. Complementando a ideia do autor, Cursino (2017, pg.28) menciona que:

quando a sociedade evolui em decorrência de transformações tecnológicas, culturais e morais, conseqüentemente a Educação deve acompanhar e adequar-se às novas concepções vividas pelos vários segmentos da sociedade, a fim de preparar seus alunos para uma visão de mundo ilimitada, integrando meios tecnológicos no processo de ensino-aprendizagem.

Com isso, o emprego das tecnologias como recurso didático vem melhorando o processo de ensino e aprendizagem dos educandos, aumentando a eficiência e a qualidade do ensino. Claro que esse emprego tem que ser de forma consciente, pois se não, os recursos se tornam mera sofisticação tecnológica.

Alguns teóricos como Laburú, Arruda e Nardi (2003) criticam a forma tradicional de ensino, alegando que essa forma de ensino tem como base a transmissão do conhecimento, como se o aluno fosse um recipiente a ser preenchido, e como resultado temos um processo ensino mecânico, ritualista, de observação, de audição, centrado tão somente no professor, tornando o aluno passivo, sem capacidade crítica e com uma visão de mundo limitada.

A inserção da tecnologia na Educação Matemática vai além de próprio conhecimento, fortalecendo em sua formação integral, inserindo em uma sociedade tecnológica e globalizada,

onde o aluno se tornará mais autônomo em buscar soluções de problemas presentes em seu cotidiano.

4 Triângulo de Pascal

Segundo Souza (2018), o Triângulo de Pascal é um triângulo aritmético formado por números relacionados entre si. Ainda na ideia do autor, o referido triângulo dispõe os números binomiais em uma tabela, onde os coeficientes binomiais de mesmo numerador ocupam a mesma linha e os de mesmo denominador ocupam a mesma coluna. Assim, a linha representa todos os coeficientes desde $\binom{n}{0}$ até $\binom{n}{n}$. A seguir representamos o Triângulo Aritmético de Pascal com os respectivos coeficientes binomiais.

| | Coluna 0 | Coluna 1 | Coluna 2 | Coluna 3 | Coluna 4 | Coluna 5 |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Linha 0: | $\binom{0}{0}$ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| Linha 1: | $\binom{1}{0}$ | $\binom{1}{1}$ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| Linha 2: | $\binom{2}{0}$ | $\binom{2}{1}$ | $\binom{2}{2}$ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| Linha 3: | $\binom{3}{0}$ | $\binom{3}{1}$ | $\binom{3}{2}$ | $\binom{3}{3}$ | ⋮ | ⋮ |
| Linha 4: | $\binom{4}{0}$ | $\binom{4}{1}$ | $\binom{4}{2}$ | $\binom{4}{3}$ | $\binom{4}{4}$ | ⋮ |
| Linha 5: | $\binom{5}{0}$ | $\binom{5}{1}$ | $\binom{5}{2}$ | $\binom{5}{3}$ | $\binom{5}{4}$ | $\binom{5}{5}$ |

Figura 1 – Construção Triângulo de Pascal

Fonte: Site Matemática Básica

Diante disso, veremos um resumo de algumas propriedades do Triângulo de Pascal de modo a facilitar sua construção e determinar os números binomiais sem a necessidade de calcular todos eles.

As propriedades de relação de Stifel e das linhas são demonstradas no livro do autor Giovanni, na coleção 360°, volume 2. As propriedades de coluna e diagonais são demonstradas na pesquisa de Rosadas (2006), nas páginas 35 a 37.

5 Procedimentos

Para as construções das atividades dinâmicas com animações foram feitas pesquisas na internet e nas dissertações que abordassem o assunto. No caso do conteúdo de Triângulo de Pascal, foi encontrada uma dissertação e uma página web da Universidade Federal Fluminense (UFF). Na dissertação de Hanke (2008), a atividade proposta teve o objetivo de “por meio de observações na formação do Triângulo de Pascal, formulassem e testassem conjecturas acerca das propriedades principais abordadas no conteúdo”, sendo realizado de maneira tradicional, sem interferência de tecnologia. Na página web de conteúdos digitais para o ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística da UFF foram encontradas algumas animações referentes ao Triângulo de Pascal, que mostravam as propriedades aos alunos sem que eles tivessem a chance de descobrir os padrões apresentados nela. Inspirado tanto nas animações e na dissertação, construímos as animações de forma que os alunos buscassem as propriedades por meio de observações e incluímos atividades e resoluções, que a página web não apresentou.

Diante dessas observações, fomos pesquisar que plataforma poderia ser utilizada para criar as animações e as atividades, e como resultado obtivemos o PowerPoint, que é de fácil acesso e manuseio pelos alunos, não necessitando de um conhecimento específico para utilizá-lo. Junto com a atividade, foi orientado aos alunos que instalassem o software Apowersoft de gravação de tela gratuito, para que todo o processo de atividade fosse gravado e enviado para analisar visualmente o desempenho dos estudantes.

Vale ressaltar que a realização desta atividade tem como requisitos prévios o conhecimento do conteúdo de Análise Combinatória (arranjo, permutação e combinação). Lembramos que, de acordo com Currículo Estadual de São Paulo, logo após essa etapa, o próximo conteúdo deste bloco é o Triângulo de Pascal.

Nessa construção, desejava-se uma animação visual que desse sentido a cada propriedade, fazendo com o que o aluno, ao visualizar a animação, conseguisse descobrir a propriedade proposta. Além disso, de acordo com Borba e Penteado (2003), devemos escolher propostas pedagógicas que enfatizem a experimentação, visualização, simulação e comunicação entre o artefato eletrônico e os alunos. A Figura 2 exibe um recorte da animação produzida.

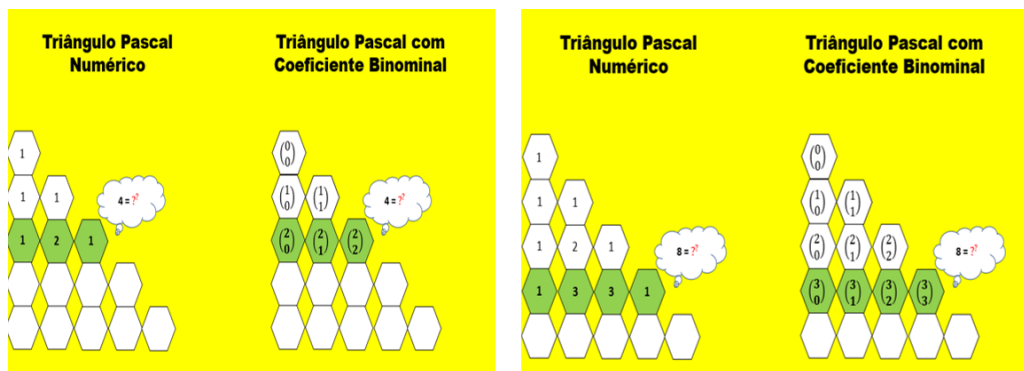


Figura 2 – Captura de tela PowerPoint da Propriedade Sequência Fibonacci.

Fonte: Autoria Própria

Para auxiliar o entendimento de cada propriedade, as atividades foram construídas em dois níveis, onde o primeiro é sobre a propriedade de caráter teórico e a segunda visa a aplicação da propriedade. Outro fato a destacar é o caráter objetivo das atividades, pois, após a confirmação da resposta selecionada, no próximo slide aparecerá a opção correta com sua resolução, dando assim ao aluno um “feedback” automático da resolução independentemente se sua resposta estava correta ou errada. O objetivo nesse caso é corrigir os possíveis erros e também aprimorar o conhecimento sobre o conteúdo, fazendo com o que aluno só passe para próxima atividade após ter visto a resolução, dando, para o aluno que errou, a oportunidade de se aprimorar e evitar futuros erros, em particular nas atividades práticas.

Os procedimentos utilizados estão descritos nas Figuras 3 e 4.

1 - Após observar a animação, assinale a opção que corresponda a propriedade relação Stifel.

- a) A divisão de dois números do triângulo localizados lado a lado é igual ao número localizado imediatamente abaixo.
- b) A subtração de dois números do triângulo localizados lado a lado é igual ao número localizado imediatamente abaixo.
- c) A multiplicação de dois números do triângulo localizados lado a lado é igual ao número localizado imediatamente abaixo.
- d) A soma de dois números do triângulo localizados lado a lado é igual ao número localizado imediatamente abaixo.



Figura 3 – Captura de tela da Atividade dinâmica (propriedade Stifel).

Fonte: Autoria Própria

1 - Após observar a animação, assinale a opção que corresponda a propriedade relação Stifel.

d) A soma de dois números do triangulo localizados lado a lado é igual ao número localizado imediatamente abaixo.

Alternativa correta é d, como vemos na imagem abaixo:

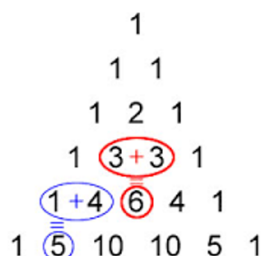


Figura 4 – Captura de tela do comentário da Atividade da Figura 3.

Fonte: Autoria Própria

As atividades foram distribuídas da seguinte maneira:

| | |
|-------------|---|
| Atividade 1 | Relação Stifel – Teórico |
| Atividade 2 | Relação Stifel – Aplicação da propriedade |
| Atividade 3 | Propriedade das Linhas – Teórico |
| Atividade 4 | Propriedade das Linhas – Aplicação da propriedade |
| Atividade 5 | Propriedades das Diagonais – Teórico |
| Atividade 6 | Propriedades das Diagonais – Aplicação da propriedade |
| Atividade 7 | Propriedade das Colunas – Teórico |
| Atividade 8 | Propriedade das Colunas – Aplicação da propriedade |

Tabela 1 – Distribuição das atividades de pesquisa.

Fonte: Autoria própria

Os estudantes podiam apresentar três possíveis respostas, a correta, que corresponde ao valor um ponto, ou incorreta ou em branco, com valor de zero pontos. Com o uso do software Apowersof permitiu-se fazer o estudo de qual estudante respondeu incorretamente à atividade ou deixou sua resposta em branco.

Ao final das atividades é calculado o percentual de aproveitamento do processo, sendo a terceira fase uma atividade de revisão com base em tudo que foi realizado.

6 Análise de Resultados

Para a interpretação dos resultados foram aplicadas técnicas estatísticas: cálculo de frequências absolutas e relativas da quantidade de acertos nos quatro tipos de questões (Figura 5, Gráficos 1 e 2). Com o objetivo de estudar se existe similaridade entre as pontuações obtidas nas questões, foi realizada uma análise de “Cluster”.

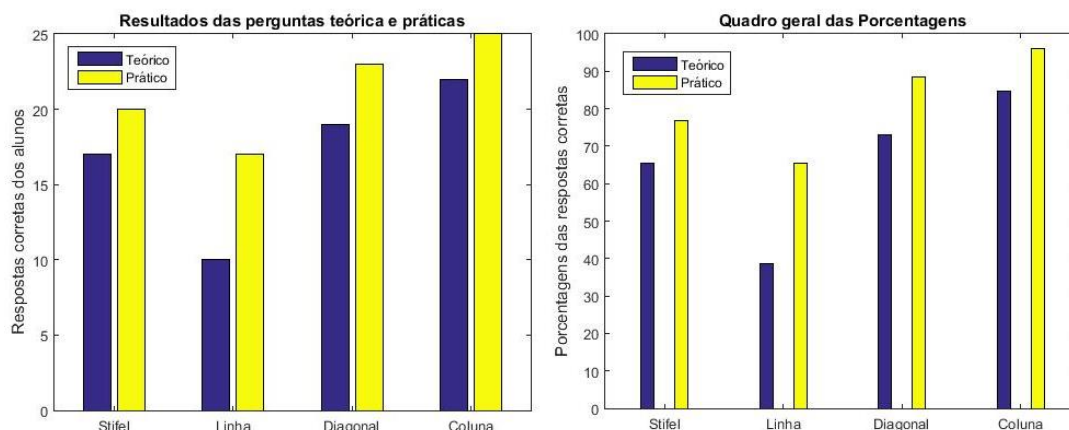


Figura 5- Gráfico 1 e 2 – Frequência e porcentagens (respectivamente) das quantidades de acerto dos estudantes nas atividades.

Fonte: Autoria Própria

Com respeito às atividades teóricas, os piores resultados ocorreram nas questões relativas a propriedades das linhas, com 38,5% de aprovação, sendo que só 10 estudantes responderam corretamente a pergunta. As demais perguntas teóricas tiveram uma porcentagem de acerto superior a 65%, onde o maior resultado alcançado foi na atividade que envolvia a propriedade das colunas, com 84,6% de acerto, 22 estudantes dos 26 responderam corretamente.

Os resultados na parte prática foram positivos, tendo um índice mínimo de porcentagem de aprovação de 65,4% na pergunta 4, associada à propriedade das linhas. Tendo em conta que o pior resultado em geral foi na teoria, desta propriedade. Observa-se que a atividade dinâmica permitiu sensível melhora. Antes de responder à aplicação, os alunos receberam a resolução correta da parte teórica, e assim, foram evitados erros na parte aplicada. Esse crescimento ocorreu nos quatro tipos de atividades, mas nesse quesito, a melhora foi superior.

Os melhores resultados foram alcançados na propriedade de colunas, que é basicamente: a soma dos elementos de qualquer coluna, do primeiro elemento até um qualquer é igual ao elemento situado na coluna à direita da considerada e na linha imediatamente abaixo. O pior resultado foi nas questões envolvendo propriedade de linhas. Observa-se que neste caso, a característica fundamental é a potenciação, e assim supomos que os estudantes têm problemas nessa operação, cometendo erro tanto na teoria quanto na aplicação da propriedade.

Ficou evidenciado que se os estudantes entendem corretamente a parte teórica antes da aplicação, a porcentagem de erro é reduzida. Isto pode ser notado pelas perguntas 3 e 4, que são respectivamente a teórica com 38,5% de acerto e a prática com 65,4% de acerto da propriedade de linhas, com aumento de 26,9%. Isso se deve ao “design” das atividades, pois o estudante só passa para atividade seguinte após ver a resolução da anterior, reduzindo a chances de erro na atividade prática de cada propriedade.

Das respostas com pontuação nula, somente 10,2% das teóricas e 1,5% das aplicadas são devidas a estudantes que não responderam, associadas, em sua maioria à propriedade das linhas, parte teórica e prática.

Em nosso estudo, as variáveis avaliadas são binárias, sendo que o valor 1 é associado às respostas corretas e 0 representa respostas incorretas ou respostas em branco.

Para avaliar se existe similaridade entre as pontuações obtidas nas atividades, utilizamos uma análise de cluster, através do programa IBM SPSS Statistics versão 22.0 do ano 2013. O objetivo é buscar algum padrão de modo que seja possível agrupar as atividades (variáveis) com base nas distâncias apresentadas na matriz da Figura 6. Essa matriz forneceu os valores de todas as distâncias euclidianas ao quadrado para as pontuações de todos os pares de atividades. Foi realizada uma análise de “clusters” pelo procedimento hierárquico pelo método do vizinho mais próximo, com as medidas de distância definidas nessa matriz.

Usando informações da matriz de distâncias, observa-se que a menor distância ocorreu entre as variáveis 6 e 8 (distância igual a 4). Ambas são correspondentes a pontuações em perguntas aplicadas nas quais foram obtidos os melhores resultados. Por outro lado, a maior distância ocorreu entre as variáveis 3 e 7 (distância igual a 20), ambas associadas às atividades teóricas que apresentaram o melhor e o pior resultado (Figura 6).

O dendrograma (Figura 7) forneceu três grupos. Observa-se que a variável 3 ficou independente, sendo justamente a atividade com pior resultado entre todas. Temos outro grupo integrado com as atividades 1 e 4, que respectivamente, são atividades teórica e aplicada, com índices de aprovação iguais, e um terceiro grupo com as demais variáveis. Com isso podemos perceber que a atividade 3 (teórica) necessita atenção especial. Acredita-se que seria necessária uma revisão sobre potenciação para evitar que os estudantes carreguem erros neste tópico, comprometendo a correta compreensão da propriedade de linhas.

Pelo tanto, observa-se que a atividade dinâmica foi eficiente. O procedimento utilizado permite ao estudante observar seus erros e a correta resolução das atividades teóricas antes da realização das atividades práticas, ver figura 7.

Matriz de distâncias

| Caso | Entrada de arquivo de matriz | | | | | | | |
|------|------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| | ATV1 | ATV2 | ATV3 | ATV4 | ATV5 | ATV6 | ATV7 | ATV8 |
| ATV1 | 0 | 15 | 15 | 10 | 10 | 8 | 9 | 10 |
| ATV2 | 15 | 0 | 14 | 13 | 9 | 9 | 8 | 7 |
| ATV3 | 15 | 14 | 0 | 15 | 11 | 15 | 20 | 17 |
| ATV4 | 10 | 13 | 15 | 0 | 14 | 10 | 9 | 10 |
| ATV5 | 10 | 9 | 11 | 14 | 0 | 8 | 11 | 8 |
| ATV6 | 8 | 9 | 15 | 10 | 8 | 0 | 7 | 4 |
| ATV7 | 9 | 8 | 20 | 9 | 11 | 7 | 0 | 5 |
| ATV8 | 10 | 7 | 17 | 10 | 8 | 4 | 5 | 0 |

Figura 6 – Matriz de distâncias.

Fonte: Autoria Própria

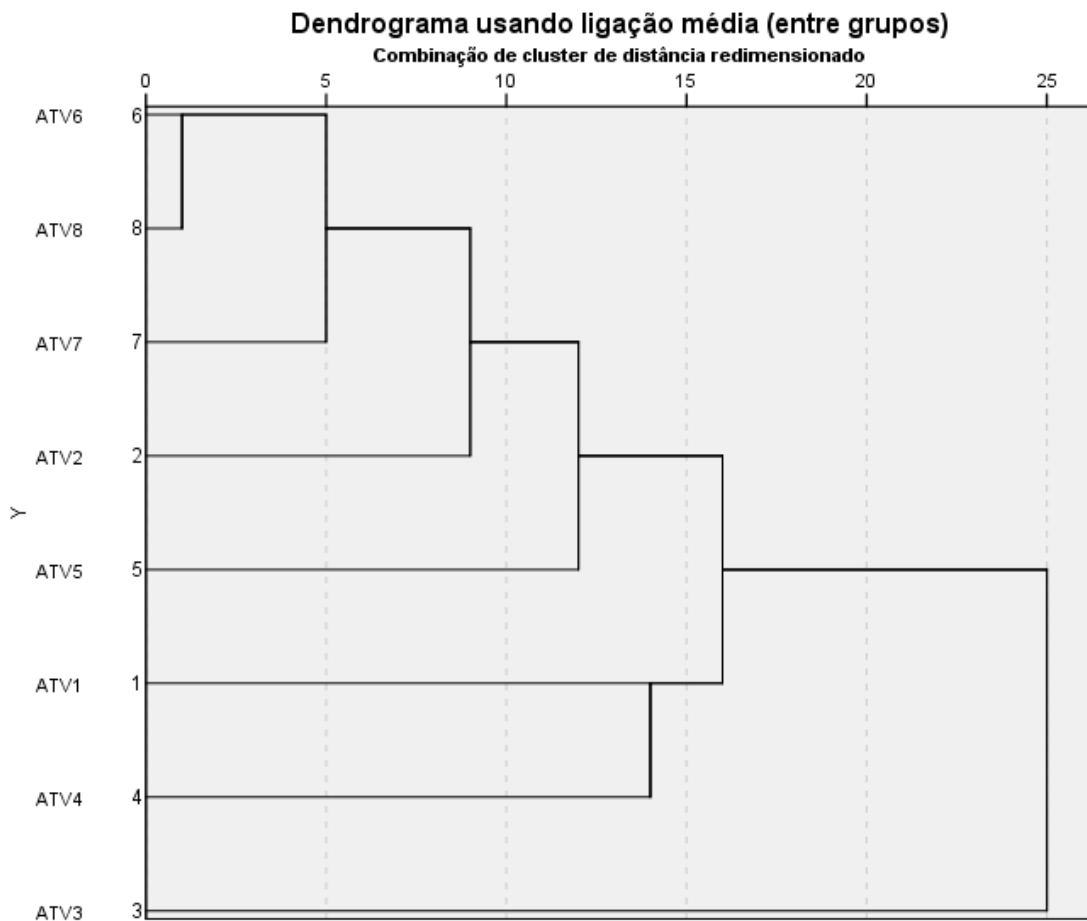


Figura 7 – Dendrograma.

Fonte: Autoria Própria

7 Considerações Finais

O trabalho desenvolvido foi gratificante, pois grande parte dos alunos se interessaram e resolveram as atividades propostas, ficando evidenciadas suas capacidades para o estudo de forma independente. O maior problema ocorreu nas questões envolvendo a propriedade das linhas, sugerindo que a principal dificuldade estaria na utilização de conhecimentos de potência.

Dados esses resultados, propõe-se que, antes de começar a trabalhar as propriedades das linhas, se faça uma revisão de potenciação, a fim de evitar que os estudantes cometam erros neste tópico.

O uso da tecnologia, em especial o uso de animações, contribui para que os estudantes mantivessem o interesse durante todo processo de aprendizagem. Esta atividade pode ser uma importante ferramenta para o estudo dos próximos tópicos, como Binômios de Newton e o cálculo de probabilidades, que vêm na sequência, de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo.

Para futuros trabalhos iremos aplicar esse método de animações para os tópicos de Estatística, em particular, no aprendizado de medidas de tendência central e de dispersão.

8 Referências

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. *Informática e Educação Matemática*. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

CURSINO, André Geraldo. *Contribuições das tecnologias para uma aprendizagem significativa e o desenvolvimento de projetos no Ensino Fundamental I*, 2017. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Escola de Engenharia de Lorena - Universidade de São Paulo, Lorena, 2017.

FARIAS, Ana Maria Lima de. *O Triângulo de Pascal*, 2009. Conteúdos Digitais para ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística da UFF. Disponível em: <<http://www.cdme.im-uff.mat.br/pascal/pascal-html/pascal-br.html>>. Acesso em: 05/01/2020.

GIOVANNI, José Ruy. *360º Matemática Fundamental: uma nova abordagem*. 2. ed. São Paulo: FTD, 2015. (Coleção, volume 2).

HANKE, Tânia Aparecida Ferreira. *Padrões de Regularidades: Uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico*, 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática), Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

LABURÚ, Carlos Eduardo; ARRUDA, Sérgio de Mello; NARDI, Roberto. *Pluralismo metodológico no ensino de Ciências*. *Ciência & Educação*. Bauru, v. 9, n. 2, p. 247-260, 2003.

PRETTO, Nelson de Luca. *Uma escola sem/com futuro: educação e multimídia*. 8ª edição, Salvador, Editora da Universidade Federal da Bahia, p.27, 2013.

ROSADAS, Vitor Dutra Soares. *Triângulo de Pascal: Curiosidades e Aplicações na Escola Básica*, 2016. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2016.

SOUZA, Cássia Ribeiro de. *Os livros didáticos de matemática, a variedade de problemas propostos e o Binômio de Newton*, 2019. 181 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2019.

SOUZA, Elvis Gomes. *Probabilidade no Ensino Médio: Metodologias Ativas como suporte*, 2018, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Alagoas, Maceió, 2018.