



VII JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

XX JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Educação matemática
e interdisciplinaridade:
diálogos, experiências e práticas possíveis

2 a 4 de abril de 2018

UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DE NOÇÕES BÁSICAS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Daniel Francisco Nichele
Universidade de Passo Fundo
134366@upf.br

Maurício Sgarbi
Universidade de Passo Fundo
151199@upf.br

Jessica Elisabeth Johann Dias
Universidade de Passo Fundo
166201@upf.br

Eliamar Ceresoli Rizzon
Universidade de Passo Fundo
lia@upf.br

Magda Ines Luz Moreira
Universidade de Passo Fundo
magmor@upf.br

Betine Diehl Setti
Universidade de Passo Fundo
diehl@upf.br

Eixo Temático: E4 – Práticas e Intervenções na Educação Básica e Superior

Modalidade: Relato de Experiência (RE)

Resumo

Este artigo visa relatar uma experiência desenvolvida em uma escola estadual do município de Passo Fundo por acadêmicos extensionistas do Curso de Matemática da Universidade de Passo Fundo (UPF), por meio do projeto de extensão denominado *Formação Continuada de Professores de Matemática* (PFCPMat). A experiência em questão trata de uma oficina sobre Análise Combinatória, desenvolvida com as turmas do 2º ano do ensino médio, sob a supervisão da professora titular da turma. Os materiais utilizados, assim como toda oficina, foram estruturados com base em estudos dos acadêmicos sob orientação e acompanhamento das professoras orientadoras do projeto. Com essa experiência obtivemos resultados interessantes, e que nos fizeram refletir sobre a importância da constante formação.

Palavras-chave: Ação Extensionista. Ensino Médio. Análise Combinatória.

1 Introdução

No ano de 2017, um grupo de acadêmicos extensionistas participantes do projeto intitulado *Formação Continuada de Professores de Matemática (PFCPMat)*, do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade de Passo Fundo (UPF), realizou estudos dos conteúdos de Análise Combinatória em diversas fontes bibliográficas e *sites*. Esse projeto faz parte do *Programa de Extensão Integração da Universidade com a Educação Básica (PIUEB)*, que é um programa institucional da UPF.

A motivação para que os alunos realizassem esse estudo, foi a intensão de auxiliar a amenizar as dificuldades que alunos do segundo ano do ensino médio, de uma escola pública estadual, da cidade de Passo Fundo, parceira do PFCPMat, apresentavam com relação ao estudo dos conceitos básicos da análise combinatória. Tal demanda foi manifestada pela professora titular de matemática das referidas turmas. O principal objetivo foi realizar pesquisas e estudos que contemplassem os conceitos fundamentais da análise combinatória envolvendo o princípio fundamental da contagem, fatorial, arranjos simples e com elementos repetidos, permutações simples e com elementos repetidos e combinações simples, com o intuito de desenvolver metodologias e estratégias para abordagens dos conteúdos em sala de aula.

Considerando que o projeto busca a interação da universidade com as escolas de educação básica, os acadêmicos, após a realização de estudos inerentes ao conteúdo em questão e a inúmeras metodologias dos processos de ensinar e aprender Matemática, organizaram oficinas pedagógicas para aplicarem com alunos do 2º ano da escola mencionada. As estratégias e os recursos propostos para apresentação dos conteúdos foram muito bem avaliados, uma vez que foram centrados em metodologias ativas, usando como recursos jogos, materiais manipuláveis e atividades lúdicas com foco na aprendizagem significativa, na compreensão dos conceitos e no real entendimento do conteúdo. Diante do exposto, este artigo apresenta o relato dessa experiência.

2 Desenvolvimento

Dentre as várias frentes de atuação do PIUEB e vinculado ao *Projeto Formação Continuada de Professores de Matemática*, destaca-se o *Grupo de Estudos com Professores de Matemática (GEPMat)*, que visa proporcionar aos professores de matemática de uma escola pública estadual de Passo Fundo, um espaço de investigação, análise, debate e

elaboração de propostas pedagógicas que venham contribuir com o aprimoramento de sua prática docente.

No ano de 2017 dois professores do ensino médio, participaram dessa ação, que já vem sendo desenvolvida e reestruturada a quatro anos. Os professores titulares da escola participam juntamente com professores extensionistas do curso de Licenciatura em Matemática da UPF, semanalmente, do grupo de estudos para formação continuada, onde busca-se qualificar a prática docente, além de refletir sobre essa prática em sala de aula e sobre os processos de ensinar e de aprender Matemática. Paralelamente a essa atividade, os acadêmicos extensionistas assistem e apoiam as aulas das professoras titulares que participam do GEPMat, a fim de conhecer a realidade da sala de aula e da escola como um todo. Para atingir essa meta, cada acadêmico acompanha e auxilia, de forma semanal, o trabalho da professora titular da turma, durante o período normal de aula.

Em momentos pré-estabelecidos e diferenciados, os acadêmicos se reúnem, na universidade, com professores extensionistas orientadores, para buscarem fundamentação teórica e realizarem a preparação de oficinas pedagógicas a serem ministradas em turno inverso ao das aulas regulares da escola de ensino médio. Esses estudantes vêm à UPF para participarem da realização das oficinas que foram elaboradas, organizadas e propostas pelos acadêmicos. As oficinas consistem em momentos de aprendizagem, os quais têm por objetivo auxiliar os alunos em suas principais dificuldades nos conteúdos estudados em sala de aula, almejando conciliar aprendizado, envolvimento e reflexão. Para isso, buscam-se métodos alternativos através do uso de recursos tecnológicos, materiais manipuláveis e atividades lúdicas, entre outros. As estratégias ou os sequenciamentos didáticos que são propostos, são desenvolvidos de forma que estejam de acordo com os estudos ou análises desenvolvidas nas seções de estudos com os professores no GEPMat.

Em 2017, entre várias atividades elaboradas, foi ministrada uma oficina referente ao conteúdo de Análise Combinatória e o público alvo foi os alunos dos segundos anos do Ensino Médio já mencionados. A intenção ao propor a realização dessa atividade foi auxiliá-los procurando amenizar as dificuldades pertinentes ao estudo desses conteúdos e a compreender as diferentes aplicações de cada conceito da Análise Combinatória, na resolução de problemas.

Num primeiro momento a professora titular da turma, relatou que o conteúdo o qual estava sendo estudado era Análise Combinatória e que alguns alunos estavam apresentando dificuldades em relação a este tema. Além disso, destacou também, que um dos grandes desafios dos alunos era identificar se determinado problema proposto era uma situação que

envolvesse arranjo, permutação ou combinação e, a partir disso, organizar a solução por meio da aplicação correta das fórmulas. Ou seja, era uma questão de leitura, interpretação e distinção dos característicos agrupamentos da análise combinatória.

Para podermos ajudar os alunos do ensino médio a compreender os conceitos, identificar as características relativas aos diferentes agrupamentos e amenizar as dificuldades, foi necessário a organização dos acadêmicos em grupos de estudos para que, primeiramente, eles tomassem conhecimento das dificuldades dos alunos da escola e ponderassem sobre quais conteúdos seriam abordados nas oficinas. Os acadêmicos receberam o apoio de professores orientadores, a fim de orientá-los sobre materiais para o estudo, as fontes de pesquisa, a organização, a construção de materiais didáticos e o acompanhamento na realização de ensaios para um bom desempenho posterior na realização das oficinas. Diversos autores foram consultados em busca de fundamentação, por exemplo, sobre Análise Combinatória, encontramos a significativa manifestação:

Brasil afirma que,

Os conteúdos do bloco Análise de dados e probabilidade têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio. Uma das razões desse ponto de vista reside na importância das ideias de incerteza e de probabilidade, associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural e social. O estudo desse bloco de conteúdos possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico. (2006, p. 78)

Certamente os conteúdos de Análise Combinatória envolvem o estudo de métodos que possibilitam formar agrupamentos de elementos que possuem determinadas características em comum e muitos estudantes encontram dificuldade em identificar as diferenças principalmente na resolução de problemas. Em cada um dos grupos é possível verificar as possibilidades e combinações dos elementos. Na opinião de Iezzi, et al, (1981p. 104), “A Análise Combinatória trata basicamente dos problemas de contagem das possibilidades com que um acontecimento pode ocorrer.” Afirma ainda, que “[...] seu estudo é de grande interesse nos mais variados campos [...], é utilizada na indústria e na ciência em todos os níveis [...]”.

Observando livros de matemática do ensino médio que contemplam o estudo da Combinatória, constatamos que a abordagem feita, em grande parte desses livros, segue a seguinte estrutura: princípio fundamental da contagem, arranjos, permutações e combinações. Com base nestas constatações e após várias reflexões e estudos, relatamos, a seguir como foi o desenvolvimento da *Oficina de noções básicas da Análise Combinatória* com os alunos da escola de ensino médio.

No início, os alunos foram desafiados por meio de uma situação-problema simples, a qual envolvia o seguinte enunciado: Maurício tem três blusas, duas calças e dois bonés. De quantas maneiras distintas ele pode se vestir? Foram entregues aos alunos, os seguintes materiais, confeccionadas pelos acadêmicos: blusas de três cores diferentes, calças de duas cores diferentes e bonés de duas cores diferentes, feitos de EVA. O intuito aqui era possibilitar aos alunos da escola, com o manuseio destes materiais, verificarem todas as possibilidades de agrupamentos com a organização das peças, considerando as cores como atributo.

Os alunos foram divididos em grupos, receberam os materiais e foi disponibilizado um tempo para que eles pudessem pensar sobre a forma de organização dos materiais, discutir e analisar as diferentes possibilidades até esgotá-las, sempre com a orientação e acompanhamento dos acadêmicos. Os resultados observados, foram considerados extremamente relevantes, pois todos os grupos chegaram a uma resposta comum que foi doze possibilidades. Essa era a resposta esperada. Em seguida, eles foram questionados sobre o raciocínio que utilizaram para chegarem ao número de possibilidades. Alguns grupos foram organizando os agrupamentos aleatoriamente e outros utilizaram a estratégia da fixação de elementos. Nesse método, os alunos fixaram uma das peças de roupa e acomodaram todas as possibilidades usando como atributo a cor da peça escolhida, o que estrutura e facilita a identificação das possibilidades.

O objetivo dessa atividade inicial foi trabalhar com o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Operacionalmente, basta multiplicar o número de peças (três blusas, duas calças e dois bonés), o que resultaria em doze possibilidades. Depois que todos os grupos concluíram a proposta, perguntamos a eles se eles enxergavam alguma semelhança entre os números descritos no enunciado e as possibilidades que estavam organizadas. Alguns relataram que para ter certeza de que todas as possibilidades de uma pessoa se vestir tinham sido esgotadas, multiplicaram o número das peças.

Nessa linha de pensamento, Passos afirma,

Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma a ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam. (2006, p. 81)

Com base nesta afirmação e por meio de questões que auxiliavam a reflexão, foi explorada a noção de Fatorial (produto dos números naturais começando em “n” elementos e

decrecendo até 1) e como desenvolvê-lo. O Fatorial é uma ferramenta importantíssima, utilizada nas Propriedades da Análise Combinatória. Após esse processo, foi feita a explanação no quadro, dando exemplos simples de como calcular o fatorial e também como efetuar as operações onde aparecem fatoriais e, também a simplificação de expressões que envolvem fatoriais.

Logo depois, foi iniciada a abordagem que contemplava o conceito de Permutação Simples. Seguiu-se com a segunda situação problema: três pessoas estão disputando uma corrida, em que há três possibilidades de classificação, 1º lugar, 2º lugar e 3º lugar. Quais são possíveis classificações? Com o mesmo propósito de usar uma estratégia que facilitasse a compreensão do conceito de permutação, três alunos que se dispuseram, foram convidados a representar para a classe, o conjunto de possibilidades, posicionando-se cada aluno em todas as possíveis classificações da corrida e assim foi feito até que cada um dos três alunos tivesse ocupado todas as posições da classificação, assim, as possibilidades ficaram visíveis e foram anotadas no quadro para melhor visualização por parte dos alunos.

Com o apoio e orientação dos acadêmicos, os alunos constataram que haviam 6 possibilidades distintas de classificação e que a Permutação Simples é um agrupamento de elementos distintos que se organizam considerando a *ordem* dos mesmos. Para isso retomamos que o fatorial de 3 é 6, assim como o resultado da questão, e perguntou-se aos alunos se eles visualizavam alguma semelhança. A partir desse questionamento, mostrou-se que na forma teórica, a Permutação Simples é um Fatorial dos elementos distintos dispostos. Usando a ideia que anagrama é a transposição de letras de uma palavra que forma outra palavra com ou sem sentido, desenvolvemos no quadro, com auxílio dos alunos, quantos anagramas diferentes obtínhamos escrevendo a palavra "Amor": 24 ($4 \times 3 \times 2 \times 1$).

Para a Permutação Repetida utilizou-se a seguinte situação: Quantos anagramas podemos formar com a palavra "Casa"? A palavra "casa" tem quatro letras, mas duas (letra a) se repetem. Questionamos os alunos se havia alguma diferença entre essa palavra e a palavra anterior, eles afirmaram que sim, entretanto ainda estavam confusos no quanto uma letra repetida poderia influenciar. Então, com orientação, foram organizados todos os anagramas chegando-se em doze possibilidades distintas. Através disso eles perceberam que como havia uma letra que se repetia duas vezes, o número de anagramas diminui pela metade. Entretanto, esse exemplo ainda foi suficiente para que eles compreendessem a organização de permutações com elementos repetidos e foi usado outro exemplo.

O outro exemplo proposto era um número composto por quatro ordens, sendo três delas constituídas do mesmo algarismo, ou seja, tínhamos uma repetição tripla. O

questionamento foi: “Quantos números distintos são possíveis formar utilizando os algarismos 1, 1, 1 e 2?” Com esse exemplo ficou evidente que não bastava dividir pelo número de algarismos que se repetiam, pois, a permutação de quatro resultaria em 24, que dividido por três seria oito, que não é nossa resposta. Então, novamente em conjunto com os alunos verificou-se que os números que se repetem independem da ordem, ou seja, a permutação entre eles deve ser descontada.

É muito comum que os alunos confundam Arranjo e Permutação, por este motivo utilizou-se um exemplo muito parecido com o exemplo usado para a compreensão da Permutação Simples: se cinco nadadores disputam um campeonato, quantos são os resultados possíveis deles três serem os primeiros colocados? Percebe-se que a diferença entre esse problema e o anterior é o número total de candidatos que disputavam os três primeiros lugares. No exemplo da corrida existiam três candidatos concorrendo a três lugares, já neste exemplo existem cinco candidatos para três lugares, ou seja, duas pessoas ficam sem classificação, isto é, duas pessoas ficam de fora do agrupamento. Para que essa diferença ficasse clara, explicou-se que na Permutação, o número total de elementos é igual ao número de elementos por agrupamento, já nesta situação, o número total de elementos é igual ou maior que o número de elementos por agrupamento. Por esta razão diz-se que a Permutação Simples é um caso particular de Arranjo. Após questionamentos e comparações foi concluído que Arranjo é um agrupamento de elementos que se diferencia pela *natureza* e pela *ordem* dos elementos.

Para que os alunos entendessem o conceito de combinação utilizou-se o seguinte exemplo: Qual o número total de apertos de mão entre quatro amigos? Para representar essa situação, foi solicitado que quatro alunos da classe, voluntários, se fizessem presentes na frente da turma e cada um deles recebeu a denominação de pessoa “x”, pessoa “y”, pessoa “w” e a pessoa “z”. Primeiramente a pessoa “x” apertou a mão das outras três, totalizando três apertos de mão. Depois, a pessoa “y” apertou a mão da pessoa “w” e “z”, e quando ela foi apertar a mão da pessoa “x” questionamos se esse aperto de mão já não havia sido feito, pois o aperto de mão da pessoa “x” com a “y” é o mesmo da pessoa “y” com a pessoa “x”. No final, ficou claro que, teve um total de 6 apertos de mãos distintos e que, nesse caso, não importa a *ordem* do aperto de mão, mas sim a *natureza* das pessoas que apertam as mãos.

Para finalizar a oficina, foi entregue aos alunos uma lista com 10 situações problemas para serem resolvidas com o acompanhamento e orientação dos acadêmicos. A proposta era que eles identificassem qual situação da Análise Combinatória o enunciado tratava, com o objetivo de verificar a compreensão dos conceitos que haviam sido trabalhados. Assim, após

os alunos analisarem e classificarem cada propriedade, os exercícios foram corrigidos, um a um, em conjunto com os acadêmicos. Neste momento foi incentivada, pelos ministrantes da oficina, a participação intensa dos estudantes e debatido, quando necessário, o motivo de utilizar tal propriedade que caracteriza os agrupamentos em cada situação.

3 Discussão dos resultados

Com base nas observações realizadas durante as atividades da oficina, foi possível verificar e constatar algumas questões importantes. No primeiro exemplo apresentado, vimos que os alunos estavam muito interessados em manipular o material que foi distribuído e organizá-lo, pois estavam ansiosos para responderem os questionamentos feitos. Manusearam o material, organizaram as possibilidades e após esgotarem todas as alternativas, conferiram diversas vezes para terem certeza que não estavam enganados. Quando questionados se usaram a estratégia mais adequada, alguns alunos responderam que acreditavam ter utilizado, enquanto outros afirmaram que não. Os que responderam negativamente não sabiam exatamente como poderiam realizar a atividade de modo diferente e tão pouco sabiam justificar o motivo de não terem feito de outra forma, por exemplo, usando cálculos matemáticos ou as fórmulas vistas durante as aulas na escola ou outro tipo de algoritmo. Ainda, alguns conseguiram dizer que a multiplicação foi o que os auxiliou na conferência do resultado final. Tais constatações, entre outras, podem ser um indício de que o conteúdo trabalhado em sala de aula realmente deixou lacunas na real compreensão dos conteúdos vistos.

Ainda poderíamos considerar que por estarmos oferecendo a eles um material diferenciado e lúdico o foco foi direcionado para a realização dessa atividade de forma menos formal, mas que por meio da participação ativa eles conseguiram formalizar as noções e conceitos desejados.

4 Considerações Finais

Acreditamos que o objetivo das oficinas sobre o estudo da Análise Combinatória foi alcançado uma vez que a metodologia e as estratégias didáticas utilizadas motivou os alunos para o desenvolvimento das atividades e os fez compreenderem os conceitos e estabelecerem as diferenças entre os tipos de agrupamentos. Também, foi facilmente percebível a adequação dos materiais, dos recursos e das estratégias didáticas usadas para o desenvolvimento desses

conteúdos bem como a importância do acompanhamento e orientação dos acadêmicos e dos questionamentos propostos. Esse conjunto de fatores contribuiu para o incentivo à participação, o envolvimento dos alunos da escola e dos acadêmicos do Curso de Matemática.

Assim, podemos afirmar que a abordagem dos conteúdos usando metodologias ativas permite ampliar a percepção dos alunos de como se estabelecem as relações entre teoria e prática, motivar para a aprendizagem e contribuir para a construção do conhecimento.

Por fim, destaca-se o quanto a participação dos alunos do curso de graduação nesse projeto de extensão é significativa para a formação profissional se considerarmos as atividades em grupo, os estudos e pesquisas realizadas, a preparação das oficinas, a construção dos materiais, a experiência em atividade de docência e a convivência com o contexto escolar da educação básica.

Referências

BRASIL, Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio ; volume 2). Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: maio 2017.

IEZZI, G. et al. *Tópicos de Matemática*. 2. ed. São Paulo: Atual, v2, 1981.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.