UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO

PPGECM
Programa de pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Instituto de Humanidades, Ciências, Educação e Criatividade - IHCEC

Fernanda Gheno

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS NO SEXTO ANO UTILIZANDO REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Passo Fundo

2024

Fernanda Gheno

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS NO SEXTO ANO UTILIZANDO REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, do Instituto de Humanidades, Ciências, Criatividade e Educação, da Universidade de Passo Fundo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, sob orientação do professor Dr. Luiz Marcelo Darroz.

Passo Fundo

2024

CIP – Catalogação na Publicação

G412a Gheno, Fernanda

Aprendizagem significativa [recurso eletrônico] : uma resposta para o ensino dos números racionais no sexto ano utilizando representação semiótica / Fernanda Gheno. – 2024.

6.1 MB ; PDF.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Marcelo Darroz.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de Passo Fundo, 2024.

1. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino. 2. Números racionais. 3. Semiótica. 4. Aprendizagem significativa. 5. Didática. I. Darroz, Luiz Marcelo, orientador. II. Título.

CDU: 372.851

Catalogação: Bibliotecária Juliana Langaro Silveira - CRB 10/2427

Fernanda Gheno

Aprendizagem Significativa: uma proposta para o ensino dos números racionais no sexto ano utilizando representação semiótica

A banca examinadora abaixo, APROVA em 21 de março de 2024, a dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Passo Fundo, como requisito parcial de exigência para obtenção de grau de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática, na linha de pesquisa Práticas Educativas em Ensino de Ciências e Matemática.

Dr. Luiz Marcelo Darroz - Orientador
Universidade de Passo Fundo - UPF

Dr. Odilon Giovannini Junior
Universidade de Caxias do Sul - UCS

Dr. Luiz Henrique Ferraz Pereira
Universidade de Passo Fundo - UPF

Dra. Cleci Teresinha Werner da Rosa
Universidade de Passo Fundo - UPF

Dedico a vitória em concluir esta dissertação e todo o trabalho nela envolvido à minha família, que foi a força e a motivação constante e incondicional.

AGRADECIMENTOS

Ao findar este trabalho de mestrado profissional, é difícil expressar plenamente a gratidão. Primeiramente, agradeço a Deus por guiar-me ao longo desta longa jornada de pesquisa, iluminando-me com a força necessária para não desistir.

Expresso minha gratidão à família, principalmente minha mãe, Vilma, minha irmã, Meisi, e meu companheiro de vida, Douglas, os quais confiaram em mim, incentivaram, deram amor, apoio e força incondicional em todos os momentos, especialmente nos momentos em que a tentação de desistir pairava ou quando a autodúvida se manifestava. Vocês fazem parte desta conquista, obrigada!

Destaco o agradecimento ao meu orientador, Dr. Luiz Marcelo Darroz, sempre disposto a sanar minhas dúvidas, orientar e fornecer um direcionamento para garantir a qualidade do trabalho, desde o início dessa jornada até os últimos minutos.

Agradeço aos meus professores do PPGECM, em especial ao Dr. Luiz Henrique Ferraz, que também fez parte da minha banca examinadora, ocasião em que me apresentou a um dos aportes teóricos desta pesquisa. Estendo esse agradecimento aos demais componentes da banca, Dra. Cleci Teresinha Werner da Rosa e Dr. Odilon Giovannini, os quais minuciosamente sugeriam algumas alterações e incentivaram muito este trabalho na etapa de qualificação.

Agradeço ao Grupo de Pesquisa Educação Científica e Tecnológica (GruPECT), cujos encontros foram organizados pela Dra. Cleci e pelo Dr. Luiz Marcelo, os quais, além de discussões e conhecimentos, proporcionaram momentos importantes para o processo e preparo da pesquisa.

Agradeço imensamente ao Projeto de Formação Continuada de Professores de Matemática (PFCPMAT) e às professoras Betine, Maria de Fátima e Eliamar, que me acolheram de braços abertos, trazendo indagações e sugestões que foram acolhidas e incorporadas ao desenvolvimento do produto educacional.

Agradeço à escola em que sou docente atualmente, Escola Estadual de Ensino Fundamental Gomercindo dos Reis, que, além de me acolher no primeiro ano de docência, abriu as portas para a aplicação do produto educacional.

Aos amigos e colegas de trabalho que ouviram minhas lamentações e desesperos, sempre apoiando, igualmente muito obrigada!

Meu coração nesse momento transborda de alegria, e as lágrimas derramadas são de felicidade, de dever cumprido. Agradeço à vida por me permitir vivenciar esse momento tão lindo e especial!

RESUMO

A presente pesquisa foi elaborada a partir de um estudo investigativo no curso de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM) da Universidade de Passo Fundo (UPF). O objetivo deste estudo é desenvolver, implementar e aplicar uma sequência didática voltada ao sexto ano do ensino fundamental, abordando os números racionais e as duas representações, construindo conceitos sólidos, estabelecendo relações entre as diferentes formas de representação com o intuito de criar um material potencialmente significativo. A problemática que gerou o estudo reflete a respeito da dificuldade dos estudantes em compreender as representações dos números racionais, em que um mesmo valor pode ser representado na forma fracionária, decimal, percentual e também em desenho, sendo necessário um bom entendimento desde o início dos conceitos para que se possa assimilar e transitar entre essas formas de escrever uma quantidade. Considerando a importância dessa compreensão e da utilidade dela no nosso cotidiano, buscaram-se subsídios na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval, e na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), de David Paul Ausubel, para responder ao seguinte questionamento: “De que forma uma sequência didática apoiada na teoria dos registros de representação semiótica pode se constituir um material potencialmente significativo para o desenvolvimento de aprendizagens dos números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental?”. Dessa forma, apoiou-se na TRRS para trabalhar as diferentes formas de representação de uma mesma quantidade e na TAS para construir a aprendizagem significativa nesse processo. Tal sequência didática foi aplicada em uma turma de sexto ano do ensino fundamental de uma escola da rede estadual na cidade de Passo Fundo/RS. Os dados utilizados para a análise do material desdobraram-se nas seguintes categorias: subsunçores, organizadores prévios, diferenciação progressiva e reconciliação integradora, pré-disposição do aluno e aplicação em novos contextos. A natureza da pesquisa classificou-se como qualitativa, uma vez que a avaliação do material potencialmente significativo se deu através das atividades de construção de materiais pelos próprios estudantes e atividades de transição, identificando, assim, os indícios de aprendizagem significativa. Os resultados obtidos indicaram que a sequência didática consistiu em um material potencialmente significativo, através da identificação dos subsunçores dos participantes, as ligações entre o que era conhecido e o novo através dos organizados prévios, a possibilidade de diferenciar os conceitos e depois integrá-los; consequentemente, tiveram interesse em aprender e aplicaram os conhecimentos em novos contextos. Nessa perspectiva, o estudo deu origem a um material de apoio para professores, que consiste no produto educacional desta dissertação, que se encontra disponível para download (http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/746124).

Palavras-chave: Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Teoria da Aprendizagem Significativa. Números racionais. Sexto ano.

ABSTRACT

This research was based on an investigative study at the master's degree course in Science and Mathematics Teaching at the Graduate Program in Science and Mathematics Teaching (PPGECM) at the University of Passo Fundo (UPF). The aim of this study is to develop, implement and apply a didactic sequence aimed at sixth graders, addressing rational numbers and their two representations, building solid concepts, establishing relationships between the different forms of representation in order to create potentially meaningful material. The problem underlying the study reflects the difficulty students have in understanding the representations of rational numbers, in which the same value can be represented as fraction, decimal, percentage and also drawing, requiring good understanding of the concepts from the outset in order to assimilate and move between these ways of writing a quantity. Given the importance of this understanding and its usefulness in our daily lives, support was drawn from Raymond Duval's Theory of Registers of Semiotic Representation (TRSR) and David Paul Ausubel's Theory of Meaningful Learning (TML) to answer the following question: “How can a didactic sequence based on the theory of registers of semiotic representation be a potentially meaningful material for the development of learning rational numbers in the sixth grade of elementary school?”. Thus, TRSR was the framework used for addressing the different ways of representing the same quantity and TML was used to build meaningful learning throughout the process. This didactic sequence was applied to a sixth grade class at a state school in the city of Passo Fundo, RS. The data used to analyze the material fell into the following categories: subsumers, previous organizers, progressive differentiation and integrative reconciliation, student pre-disposition and application in new contexts. The research was classified as qualitative, since the evaluation of potentially significant material took place through material construction activities carried out by the students themselves and transition activities, thus identifying signs of meaningful learning. Results show that the didactic sequence consisted of potentially meaningful material, through the identification of the participants' subsumers, the links between what was known and what was new through previous arrangements, the possibility of differentiating concepts and then integrating them; consequently, they were interested in learning and applied their knowledge in new contexts. From this perspective, the study gave rise to support material for teachers, which is the educational product of this dissertation, which is available for download (http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/746124).

Keywords: Theory of Registers of Semiotic Representation. Theory of Meaningful Learning. Rational numbers. Sixth year.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Atividades cognitivas ligadas à semiose 27
Figura 2 - Classificação dos registros de representação semiótica em matemática 28
Figura 3 - Formas de Aprendizagem Significativa tal como concebidas na Teoria da Assimilação 34
Figura 4 - Relação TRRS e TAS 46
Figura 5 - Registros atividade com barbantes 52
Figura 6 - Definição de fração 53
Figura 7 - Bolinhos de argila 54
Figura 8 - Questão respondida 55
Figura 9 - Partes consideradas em relação ao todo 56
Figura 10 - Processo do corte de bolo 56
Figura 11 - Dinâmica folha sulfite 58
Figura 12 - Kit de triângulos equiláteros 60
Figura 13 - Montagem dos triângulos 60
Figura 14 - Registros da representação de cada parte dos triângulos 61
Figura 15 - Registros das montagens com mais de uma cor 61
Figura 16 - Soluções dos desafios 62
Figura 17 - Escala Cuisenaire 67
Figura 18 - Exemplos escala Cuisenaire 68
Figura 19 - Realização da atividade escala Cuisenaire 69
Figura 20 - Registros da atividade Cuisenaire no caderno 69
Figura 21 - Equivalência referente à atividade da dinâmica 2 71
Figura 22 - Equivalência de frações 72
Figura 23 - Construção da girafa 74
Figura 24 - Localização das frações na reta numérica 78
Figura 25 - Localização das frações na reta numérica 79
Figura 26 - Pizza da situação-problema 82
Figura 27 - Representações de frações equivalentes 87
Figura 28 - Os números decimais 93
Figura 29 - Capa do produto educacional que acompanha a dissertação 94
Figura 30 - Instrumentos da coleta 101
Figura 31 - Pergunta 1 do questionário para identificação dos subsunçores 103

Figura 32 - Respostas da pergunta 2 do questionário para identificação dos subsunçores 103
Figura 33 - Tabela números racionais 105
Figura 34 - Questionário dinâmica bolinho de argila 108
Figura 35 - Aplicação da dinâmica bolinho de argila 109
Figura 36 - Relatório dinâmica composição e decomposição de triângulos parte I 110
Figura 37 - Relatório dinâmica composição e decomposição de triângulos parte II 110
Figura 38 - Desenho geométrico e frações – Cuisenaire 113
Figura 39 - Respostas Apêndice M parte I 113
Figura 40 - Respostas Apêndice M parte II 114
Figura 41 - Respostas Apêndice M parte III 114
Figura 42 - Respostas Apêndice P 115
Figura 43 - Respostas Apêndice Q 115
Figura 44 - Receita contendo frações nos ingredientes 118
Figura 45 - Atividade diferenciação progressiva e reconciliação integradora 119
Figura 46 - Questionário Apêndice P 120
Figura 47 - Atividade de transição 121
Figura 48 - Relatório de um minuto dinâmica argila parte I 123
Figura 49 - Relatório de um minuto dinâmica argila parte II 123
Figura 50 - Relatório de um minuto dinâmica argila parte III 124
Figura 51 - Relatório de um minuto dinâmica argila parte IV 124
Figura 52 - Relatório de um minuto dinâmica argila parte V 125
Figura 53 - Relatório de um minuto dinâmica argila parte VI 125
Figura 54 - Relatório de um minuto dinâmica confetes parte I 127
Figura 55 - Respostas Apêndice S parte I 128
Figura 56 - Respostas Apêndice S parte II 129
Figura 57 - Respostas Apêndice S parte III 130
Figura 58 - Respostas Apêndice S parte IV 130
Figura 59 - Respostas Apêndice S parte IV 131
Figura 60 - Respostas Apêndice S parte V 131
Figura 61 - Respostas Apêndice S parte VI 132
Figura 62 - Atividade confetes parte I 133
Figura 63 - Atividade confetes parte II 133
Figura 64 - Atividade confetes parte III 134
Figura 65 - Atividade confetes parte IV 135

Figura 66 - Atividade confetes parte V 135
Figura 67 - Atividade confetes parte VI 135
Figura 68 - Atividade confetes parte VII 136
Figura 69 - Atividade confetes parte VIII 136

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Dissertações investigadas na revisão de estudos 39
Quadro 2 - Representações dos números racionais e os tipos de representações segundo Duval 45
Quadro 3 - Representação dos números racionais 53
Quadro 4 - Orientações da dinâmica 2: folha de papel sulfite 58
Quadro 5 - Leitura de frações 64
Quadro 6 - Situação-problema 65
Quadro 7 - Questionário Escala Cuisenaire 67
Quadro 8 - Exercícios Escala Cuisenaire 70
Quadro 9 - Atividade girafa 73
Quadro 10 - Comparação de frações 75
Quadro 11 - Exercícios de multiplicação e divisão de frações 83
Quadro 12 - Exemplos de porcentagem através de questionamentos 85
Quadro 13 - Os números decimais 88
Quadro 14 - Exemplos de porcentagem através de questionamentos 90
Quadro 15 - Exemplos de porcentagem através de questionamentos 91

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CRE	Coordenadoria Regional de Educação
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
IREM	Instituto de Pesquisa Sobre o Ensino da Matemática
NAEP	National Assessment of Educational Progress
NTCM	Conselho Nacional dos Professores de Matemática nos Estados Unidos
OBMEP	Olimpíadas Brasileiras de Matemática
PFCPMAT	Projeto de Formação Continuada de Professores de Matemática
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
SEDUC	Secretaria da Educação
TAS	Teoria da Aprendizagem Significativa
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
UPF	Universidade de Passo Fundo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **15**
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA **22**
2.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica **22**
2.2 Teoria da Aprendizagem Significativa **29**
2.3 Estudos Relacionados **38**
3 A PROPOSTA **44**
3.1 Relação entre TRRS e TAS: a construção da sequência didática **44**
3.2 Contextualização da Implementação **47**
3.2.1 O local da aplicação 48
3.2.2 Os participantes da sequência didática e sujeitos da pesquisa 50
3.3 Os encontros **50**
3.3.1 Primeiro encontro: apresentação da proposta e identificação dos subsunçores 50
3.3.2 Segundo encontro: início da proposta 51
3.3.3 Terceiro encontro: dinâmica 1 – Bolinho de argila parte I 54
3.3.4 Quarto encontro: dinâmica 1 – Bolinho de argila parte II 55
3.3.5 Quinto encontro: dinâmica 2 – Folha de papel sulfite parte I 57
3.3.6 Sexto encontro: dinâmica 2 – Folha de papel sulfite parte II 59
3.3.7 Sétimo encontro: dinâmica 2 – Folha de papel sulfite parte III 59
3.3.8 Oitavo encontro: dinâmica 3 – Composição e decomposição de triângulos parte I 59
3.3.9 Nono encontro: dinâmica 3 – Composição e decomposição de triângulos parte II 62
3.3.10 Décimo encontro: conceito, nomenclatura e leitura das frações 63
3.3.11 Décimo primeiro encontro: situações problemas com frações parte I 64
3.3 12 Décimo segundo encontro: situações problemas com frações parte II 66
3.3.13 Décimo terceiro encontro: frações equivalentes – Escala Cuisenaire parte I 66
3.3.14 Décimo quarto encontro: frações equivalentes – Escala Cuisenaire parte II 68
3.3.15 Décimo quinto encontro: frações equivalentes – Escala Cuisenaire parte III 70
3.3.16 Décimo sexto encontro: tabela de frações equivalentes parte I 71
3.3.17 Décimo sétimo encontro: tabela de frações equivalentes parte II 73
3.3.18 Décimo oitavo encontro: contextualização e exercícios sobre frações equivalentes parte I 74
3.3.19 Décimo nono encontro: contextualização e exercícios sobre frações equivalentes parte II 75

3.3.20 Vigésimo encontro: comparação de frações 75
3.3.21 Vigésimo primeiro encontro: comparação de frações 76
3.3.22 Vigésimo segundo encontro: tipos de frações parte I 76
3.3.23 Vigésimo terceiro encontro: tipos de frações parte II 77
3.3.24 Vigésimo quarto encontro: localização das frações na reta numérica parte I 77
3.3.25 Vigésimo quinto encontro: localização das frações na reta numérica parte II 78
3.3.26 Vigésimo sexto encontro: adição e subtração de frações parte I 79
3.3.27 Vigésimo sétimo encontro: adição e subtração de frações parte II 80
3.3.28 Vigésimo oitavo encontro: adição e subtração de frações parte III 80
3.3.29 Vigésimo nono encontro: adição e subtração de frações parte IV 81
3.3.30 Trigésimo encontro: multiplicação e divisão de frações parte I 81
3.3.31 Trigésimo primeiro encontro: multiplicação e divisão de frações parte II 83
3.3.32 Trigésimo segundo encontro: multiplicação e divisão de frações parte III e introdução a porcentagem 84
3.3.33 Trigésimo terceiro encontro: a porcentagem em situações problemas 85
3.3.34 Trigésimo quarto encontro: atividade geral frações 86
3.3.35 Trigésimo quinto encontro: fração e porcentagem parte I 86
3.3.36 Trigésimo sexto encontro: fração e porcentagem parte II 86
3.3.37 Trigésimo sétimo encontro: introdução aos números decimais e a relação com as frações parte I 87
3.3.38 Trigésimo oitavo encontro: introdução aos números decimais e a relação com as frações parte II 88
3.3.39 Trigésimo nono encontro: as transformações decimais parte I 89
3.3.40 Quadragésimo encontro: as transformações decimais parte II e atividades de transição 90
3.3.41 Quadragésimo primeiro encontro: as representações dos números racionais – atividades de transição 91
3.3.42 Quadragésimo segundo encontro: representação semiótica dos números racionais e transições parte I 92
3.3.43 Quadragésimo terceiro encontro: representação semiótica dos números racionais e transições parte II 92
3.4 O Produto Educacional 93
4 A PESQUISA 97
4.1 Classificação da pesquisa 97

4.2 Os instrumentos da coleta de dados ... 99

4.3 Procedimentos de análise ... 100

5 RESULTADOS ... 102

5.1 Subsunçores ... 102

5.2 Organizadores prévios ... 107

5.3 Diferenciação progressiva e reconciliação integradora ... 116

5.4 Predisposição do aluno em aprender ... 122

5.5 Aplicação em novos contextos ... 127

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS ... 137

REFERÊNCIAS ... 142

ANEXO A - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) ... 145

APÊNDICE A - Autorização fornecida pela escola ... 146

APÊNDICE B - Questionário para identificação dos subsunçores sobre frações ... 147

APÊNDICE C - Contextualização histórica ... 150

APÊNDICE D - Questionário dinâmica bolo de argila ... 151

APÊNDICE E - Exercícios dinâmica 2 ... 153

APÊNDICE F - Aplicações das frações ... 156

APÊNDICE G - Conceito e exercícios sobre equivalência, simplificação e irredutibilidade ... 159

APÊNDICE H - Comparação de frações ... 162

APÊNDICE I - Tipos de frações ... 164

APÊNDICE J - Frações na reta numérica ... 165

APÊNDICE K - Adição e subtração de frações ... 166

APÊNDICE L - Questionário para entregar ... 168

APÊNDICE M - Exercícios porcentagem ... 171

APÊNDICE N - Exercícios transição fração, porcentagem e desenho ... 173

APÊNDICE O - Relação números decimais e material dourado ... 175

APÊNDICE P - Exercícios com material dourado ... 176

APÊNDICE Q - Exercícios números decimais ... 178

APÊNDICE R - Tabela de transição ... 179

APÊNDICE S - Representação dos números racionais e transições ... 181

1 INTRODUÇÃO

Uma das frases mais famosas do astrônomo e físico Galileu Galilei é: “A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo” (*apud* Gouveia, [s.d.]). Tal frase gera uma grande reflexão sobre a matemática e o questionamento de como o mundo que conhecemos seria caso ela não existisse. É notório que, sem a sua existência, não existiriam edifícios, navios, computadores, celulares e inúmeros recursos dos quais usufruímos cotidianamente. Conheceríamos o mundo apenas com nosso campo de visão e, provavelmente, ainda utilizaríamos animais como meio de locomoção; além disso, não poderíamos efetuar compras, apenas negociar trocas de mercadorias, tendo o auxílio de pedrinhas, por exemplo, conforme as histórias sobre o surgimento dos números nos contam.

A matemática surgiu para que pudéssemos evoluir em todos os sentidos possíveis. É a partir dela que hoje temos à nossa disposição a tecnologia, que, entre muitas possibilidades, nos permite: obter qualquer informação a um toque de distância; falar via mensagens e chamadas de áudio e vídeo com uma pessoa de qualquer localização; escolher como queremos viajar, pelo chão, mar ou ar. A matemática possibilitou a criação dos números que, além de todas essas evoluções, nos permitiu obter um sistema monetário, com o qual realizamos compras para suprir nossas necessidades.

No entanto, a matemática é um componente curricular que gera inúmeras dificuldades de aprendizagens para os alunos, visto que, entre muitos motivos, um seria que eles não conseguem compreender sua aplicabilidade no dia a dia. Essa dificuldade gera, segundo Selbach (2010) (*apud* Masola; Allevato, 2019), uma má fama para a matemática, o que acaba incentivando alguns professores a trabalharem de forma mecanizada, apenas com a aplicação de fórmulas e regras, sem construir um sentido real para o aluno. Nessa perspectiva, o Conselho Nacional dos Professores de Matemática, nos Estados Unidos (NTCM) admite:

> De facto, a aprendizagem sem compreensão tem se revelado um problema persistente desde, pelo menos, a década de 30 e tem sido objecto de uma diversidade de debates e pesquisas, realizadas por psicólogos e educadores ao longo dos anos [...]. A aprendizagem da Matemática [...] exige compreensão e capacidade de aplicar procedimentos, conceitos e processos. No século vinte e um, deverá esperar-se que todos os alunos compreendam e sejam capazes de aplicar seus conhecimentos em Matemática (*apud* Masola; Allevato, 2019, p. 54).

Essa dificuldade, segundo Walle (2009), se deve também ao ensino tradicional, baseado em um padrão educativo seguindo uma página do livro didático, em que o professor guia os alunos, dizendo de uma forma preestabelecida como utilizar os materiais, apenas com a intencionalidade de obter respostas. Ele afirma:

> Para muitos, a matemática é uma coleção de regras a serem dominadas, de cálculos aritméticos, de equações algébricas misteriosas e de demonstrações geométricas. Esta percepção está totalmente em contraste com uma visão da matemática que envolva dar significado aos objetos matemáticos tais como dados, formas, variações ou padrões (Walle, 2009, p. 31).

O autor defende que a matemática é uma ciência que possui um padrão, uma regularidade e uma ordem lógica; quando descobertos e explorados, dá-se sentido e faz-se matemática:

> O mundo está cheio de padrões e de ordem: na natureza, na arte, nas construções, na música. Padrões e ordem são encontrados no comércio, na ciência, na medicina, nas indústrias e fábricas e na sociologia. A matemática descobre esta ordem, lhe dá sentido, e a utiliza em uma variedade de maneiras fascinantes, melhorando nossas vidas e ampliando nosso conhecimento. A escola tem que começar a ajudar as crianças com este processo de descoberta (Walle, 2009, p. 32).

D'Ambrosio (2007) fala sobre o desafio da educação em praticar significativamente no hoje o que poderá ser útil no amanhã, pois o que é feito no hoje se manifestará no futuro e, a partir da reflexão dessa execução, é que podemos reformular e aprimorar a nossa prática docente. Assim, os professores precisam encontrar formas de ensinar para que os estudantes se sintam engajados a aprender matemática, capazes de compreender o quão essencial ela é para o cotidiano em que vivemos.

Selbach (2010) *(apud* Masola; Allevato, 2019) relata que, para ensinar matemática nos tempos modernos, é necessário mudar a prática docente, trocando as regras e os conceitos sem sentido pelo acréscimo de participação do aluno no processo do conhecimento matemático. Assim, o aluno aprende a solucionar problemas e a interagir expondo as informações.

Dado o exposto a respeito da importância da matemática, particularmente[1], faço parte do conjunto de pessoas que a amam. Sempre assimilei facilmente os conteúdos e ensinava aos colegas que possuíam dificuldades, igual as brincadeiras de infância, brincando de escolinha e preenchendo livros antigos. Toda a minha trajetória educacional foi em âmbito público, tanto estadual quanto municipal, de cidades pequenas do Rio Grande do Sul. Ingressei no mercado de trabalho cedo, com 16 anos, ainda no Ensino Médio, trabalhando durante o dia e estudando à noite. Ao findar do ano de 2014, no último ano do Ensino Médio, recebi muito incentivo para

[1] Nesta fase do texto, optei por escrever na primeira pessoa do singular, considerando que são evidenciados os motivos pessoais para a escolha da profissão e o caminho até chegar ao curso de mestrado.

fazer licenciatura ao conversar com alguns professores. Porém, acabei não ingressando diretamente na faculdade, optando por fazer um Curso Tecnólogo em Administração gratuito que a escola fornecia. Desmotivada pelas inúmeras falas de que ser professor era difícil e sem rentabilidade, ao finalizar o técnico, ingressei no curso de Arquitetura e Urbanismo da Universidade de Passo Fundo (UPF), em 2016. Apenas um semestre foi necessário para sentir que faltava algo.

Sentia a necessidade de ter um caderno e fazer cálculos. Em 2017, após pensar muito, efetuei a transferência para o curso de Licenciatura em Matemática na UPF. Em 2021, graduada, pós-graduada em dois cursos e ocupando o cargo de Analista de Departamento Pessoal em uma ótima empresa, comecei a dar aulas particulares, o que me fascinou. Lembro de chegar em casa com um sentimento de realização e de euforia em estar ensinando alguém. A partir desse sentimento aflorado, comecei a buscar as possíveis vagas nas escolas próximas, quando surgiu a oportunidade de lecionar a partir de um contrato emergencial por tempo indeterminado no estado do Rio Grande do Sul (RS). Até então, nunca havia entrado em sala de aula como professora.

Comecei a lecionar como professora substituta em outubro de 2021, porém, queria mais formação docente. Ao encontrar o Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM), visualizei a oportunidade de crescer profissionalmente e melhorar minha prática, podendo proporcionar aos alunos mais conhecimento e interesse pela matemática. Assim, me mudei para Passo Fundo em fevereiro de 2022 para fazer o curso e continuar lecionando na rede estadual de ensino.

Dentro do meu contexto escolar, pude presenciar algumas situações em que percebia a dificuldade dos alunos – já no Ensino Médio – com qualquer conteúdo que envolvesse as frações. As frações começam a ser trabalhadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental e, ao longo dos anos finais, vão ganhando mais consistência; então, perceber que alguns chegavam ao Ensino Médio sem compreender o que é uma fração foi um alerta de preocupação.

Santos, França e Santos (2007) relatam que um dos motivos para esse tipo de dificuldade são as várias ideias que os números racionais abrangem e que, na maioria dos casos, os alunos compreendem vagamente as operações pelos algoritmos de forma mecânica, sem, de fato, compreender o processo do que estão fazendo.

As frações fazem parte do conjunto dos números racionais que abordam também os números decimais e percentuais; portanto, é um conteúdo que deve ser bem trabalhado em sala de aula para que os estudantes construam seu conhecimento.

Em consequência disso, comecei a me questionar e buscar por que isso acontecia. Nas minhas buscas, que comentarei nos estudos relacionados mais detalhadamente no segundo capítulo, encontrei diversos trabalhos a respeito, mas nenhum que me encantasse. Comecei a participar do grupo de Formação Continuada de Professores de Matemática (PFCPM) na UPF, em que a discussão de certo encontro era voltada às frações e decimais, e me questionei: será que os alunos compreendem que $\frac{1}{2}$ e $0{,}5$ representam a mesma quantidade ou que $\frac{10}{2}$ e 5 representam a mesma quantidade e localizam-se no mesmo ponto da reta numérica?

Pensando nisso, notei que nunca achei correta a forma que, normalmente, os professores do sexto ano do Ensino Fundamental trabalham os números racionais. Seguindo os livros didáticos, iniciam com frações, depois decimais e, posteriormente, porcentagem, como se cada conteúdo tratasse de assuntos diferentes. Para que os alunos compreendam essas representações, deve-se evidenciar que se trata de um mesmo conjunto numérico que possui mais de uma representação: a fracionária, a decimal e a percentual. Segundo Walle (2009, p. 47),

> Uma ideia matemática compreendida por completo é estendida com mais facilidade à aprendizagem de uma nova ideia. Os conceitos e as relações numéricas ajudam no domínio de fatos básicos, os conhecimentos de fração e de valor posicional se reúnem para facilitar a aprendizagem de decimais, e os conceitos decimais enriquecem diretamente uma compreensão de conceitos e procedimentos de porcentagem. Sem essas e muitas outras conexões, as crianças precisarão aprender cada novo pedaço de informação que encontrarem como uma ideia separada e sem conexão.

Sendo assim, faz sentido trabalhar de forma que o aluno entenda que essas representações podem demonstrar o mesmo valor e que não são assuntos distintos, mas, sim, representações diferentes de um mesmo conjunto numérico. Walle (2009) relata que o ensino se faz eficaz quando as atividades desenvolvidas são concentradas nos estudantes, e o professor deve cativá-los, propondo a busca pelos significados. O autor, baseando-se em Wearne e Kouba (2000), entende que as frações sempre representaram um grande desafio aos estudantes, mesmo nas séries finais do EF. Os resultados dos testes do National Assessment of Educational Progress (NAEP) mostram consistentemente que os estudantes têm uma compreensão muito fraca dos conceitos de fração. E conclui: “Essa falta de compreensão é então traduzida para múltiplas dificuldades com o cálculo de frações, os conceitos de decimal e de porcentagem, o uso de frações em medidas e os conceitos de razão e proporção” (Walle, 2009, p. 322).

Os números racionais são vistos com frequência em medidas de condimentos de receitas, na quantidade de gasolina no tanque de combustível, na quantidade de bateria do celular ou no download de algum arquivo, no troco do mercado, nas promoções e taxas de juros, nas notas escolares, enfim, em inúmeras situações do dia a dia, que todos deveriam conhecer para poder conviver com as situações reais da sociedade em que vivem. Walle (2009, p. 362) ainda diz que:

> Essa sequência de explorar primeiro as frações e depois os decimais é justificadamente a melhor abordagem. Porém, infelizmente os tópicos de frações e de decimais em geral são desenvolvidos muito isoladamente. Conectar as ideias de frações aos decimais pode ser extremamente útil, tanto de um ponto de vista pedagógico quanto de um ponto de vista prático e social. [...] Ambos os simbolismos decimal e fracionário representam as mesmas ideias – os números racionais.

Dentre as disciplinas trabalhadas no PPGECM, em Tópicos de Matemática, identifiquei a potencialidade em um dos autores que ia ao encontro desses apontamentos, a partir das diferentes representações de um mesmo valor numérico. Raymond Duval, autor da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), relata sobre a utilização de mais de uma representação para o mesmo objeto, fazendo com que o aluno assimile melhor o conteúdo trabalhado. Sua importância é destacada por Walle (2009, p. 53), ao afirmar: "Quanto mais modos são propostos às crianças para pensar sobre e para testar uma ideia emergente, maior a chance de elas formarem corretamente e integrarem a ideia em uma rica rede de ideias e compreensão relacional".

É importante que os alunos compreendam que pode existir mais de uma representação do mesmo valor, compreender que eles podem ser expressos de diferentes formas e, ao mesmo tempo, poder transitar entre esses tipos de representações. Duval (2013) descreve quatro tipos de representação: a língua natural; os sistemas de escrita; as figuras geométricas; os gráficos cartesianos. No seu entendimento, quando a aprendizagem é realizada com diferentes tipos de registro, o aluno aprende significativamente. No que diz respeito à Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), de David Paul Ausubel, o autor descreve em seus estudos que, para que o aluno aprenda de forma significativa, é essencial haver uma conexão entre seus conhecimentos prévios e as informações que serão aprendidas, isto é, a conexão entre os subsunçores e os novos conhecimentos. Para que ocorra a aprendizagem significativa, é necessária a disposição do sujeito em aprender e a utilização de materiais potencialmente significativos. Em concordância com essa ideia, Walle (2009) fala sobre o que os aprendizes conhecem, pois quando o sujeito mantém um pensamento ativo e com reflexões, as informações vão se modificando de forma que melhorem o que já é conhecido por ele.

A estrutura cognitiva dos aprendizes possui dois processos de caracterização, etapas muito importantes para que a TAS aconteça e que devem se desenvolver ao longo das atividades: a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. A primeira refere-se ao aluno compreender o que é uma fração, um decimal e uma porcentagem, cada representação com suas características e conceitos; a segunda refere-se à integração desses conceitos, isto é, o aluno compreender que essas representações tratam do mesmo conjunto numérico – os números racionais.

Em consonância ao que foi exposto, definiu-se a questão norteadora que originou a presente pesquisa: De que forma uma sequência didática apoiada na teoria dos registros de representação semiótica pode se constituir um material potencialmente significativo para o desenvolvimento de aprendizagens dos números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental? Em outros termos, buscou-se o desenvolvimento de uma sequência didática que relacionasse as diferentes representações de um mesmo número, apoiado na TRRS de forma que os alunos aprendam significativamente, conforme os pressupostos da TAS.

Visando responder a esta questão de pesquisa, tem-se como objetivo geral o desenvolvimento de uma sequência didática, abordando o conjunto dos números racionais apoiada na TAS e na TRRS, com foco na compreensão das representações e transições entre elas, com o intuito de criar um material potencialmente significativo. De modo mais específico, pretende-se aprofundar os estudos sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Teoria da Aprendizagem Significativa; efetuar um estudo no site da CAPES, buscando estudos relacionados que orientem a pesquisa; elaborar, implementar e aplicar uma sequência didática que trabalhe os números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental; criar um produto educacional para ser um material de apoio voltado aos professores.

Este texto, após esta introdução, que constitui o primeiro capítulo, volta-se, no segundo capítulo, à apresentação dos aportes teóricos que fundamentaram a pesquisa, com a premissa de situar o leitor sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Teoria da Aprendizagem Significativa, seguidas dos estudos relacionados voltados aos números racionais. Em seguida, serão apresentados, ao longo do terceiro capítulo, a relação existente entre as teorias, para que seja visível a importância da ligação de ambas para a realização da pesquisa. Também será apresentada a implementação da proposta, contextualizando a localização da aplicação e os participantes da pesquisa. Na sequência foram descritos os encontros realizados e o produto educacional. No prosseguimento, a descrição de pesquisa qualitativa e dos instrumentos que foram utilizados para a coleta e validação dos dados serão expostos no quarto capítulo. Finalizando, foram apresentados os resultados da pesquisa a partir das categorias de análise e as considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Uma das teorias fundamentais para apoiar a proposta apresentada é a Teoria dos Registro de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval, pois busca a utilização de mais de uma representação do mesmo objeto e a importância dessa ação para a construção cognitiva do sujeito. Assim, permite-se a transição entre as representações, sendo possível compreender melhor o objeto e construir um real significado para a sua aprendizagem. Tratando-se desse real significado para a aprendizagem, o outro aporte teórico é a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS), de David Paul Ausubel, a qual defende que só se aprende significativamente algo quando se considera o que o sujeito já conhece, ou seja, a partir de seus conhecimentos prévios.

Nesse sentido, este capítulo apresenta uma síntese sobre a TRRS e a TAS, as quais fundamentam teoricamente o trabalho e, ao final, a descrição dos estudos relacionados que vêm ao encontro com esta proposta.

2.1 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) foi uma proposta do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, que, hoje, é professor emérito em Ciências da Educação da Université du Littoral Côte d'Opale, na cidade de Boulogne-sur-mer/França. Pesquisador da área de psicologia cognitiva desde 1970, proporcionou notáveis subsídios para a educação, principalmente no que diz respeito à matemática. Publicada em 1995, os estudos dessa teoria vem crescendo cada vez mais no Brasil, servindo como fundamentação nas pesquisas matemáticas.

De acordo com Duval (2013), a teoria surgiu com o findar da sua tese fundamentada na Teoria Epistemológica Genética de Jean Piaget, quando foi contratado pelo Instituto de Pesquisa Sobre o Ensino da Matemática (IREM) de Estrasburgo/França para acompanhar a reforma da Matemática Moderna. Seguindo a teoria piagetiana, Duval baseava-se no desenvolvimento cognitivo do sujeito e nas estruturas operatórias e de ação, partindo, assim, para duas linhas de pesquisa. A primeira era a respeito da compreensão dos alunos, uma demanda que se iniciou por causa da reforma. Foi nessa ocasião que iniciou o contato com alunos, professores e a sala de aula, podendo vivenciar a variedade linguística da matemática. A segunda linha de pesquisa era sobre os estágios de operações e os estágios de operações concretas, conforme o modelo de Piaget.

Após um envolvimento com ambas as linhas de pesquisa, Duval (2013) começou a perceber as dificuldades que os alunos encontravam nas atividades que abrangiam a passagem da língua natural para as diversas formas simbólicas matemáticas. Com a ajuda de alguns professores, seu primeiro trabalho foi uma publicação contendo um questionário de tradução da linguagem matemática. Com o passar do tempo, ambas as linhas de pesquisa foram abandonadas. A primeira porque, obviamente, tornava-se um impasse inserir os alunos nas demonstrações piagetianas, e a segunda porque ia contra Piaget, pois observara que, no ensino, importavam os conceitos matemáticos sendo repetidos incansavelmente até a sua compreensão, tornando-se apenas uma mera compreensão mental, não percebendo nenhuma importância da linguagem.

Duval (2013) denominava-se, neste período, como um psicólogo que não compreendia matemática e se voltou para uma pesquisa de investigação sobre aquisições dessa vasta área. Com as mudanças da matemática moderna, a problematização no ensino foi envolvida pela leitura e compreensão de textos, bem como a compreensão dos enunciados dos problemas. Percebendo que os professores comentavam sobre a dificuldade dos alunos no domínio da linguagem, ele reorganizou a pesquisa para todas as disciplinas questionando-se: “[...] que tipo de esquema e, de modo mais geral, que tipo de representação é a mais pertinente para dar conta não apenas de um texto, mas de um raciocínio dedutivo, de uma representação, de uma escrita simbólica, etc.?” (Duval, 2013, p. 13).

Em 1986, retornou para as suas duas linhas de pesquisa. No entanto, as diferenças desses anos em que ambas estavam abandonadas foram de extrema valia, visto que ele foi concretizando experiências durante as mudanças que ocorriam no ensino da matemática e na formação docente, construindo uma visão mais ampla sobre o assunto. Ele relata:

> Primeiro eu tinha adquirido uma visão mais completa dos diferentes aspectos da atividade matemática que as mudanças sucessivas dos programas escolares tinham favorecido, excluído ou ignorado: os raciocínios do tipo dedutivo e do tipo argumentativo em língua natural, a compreensão dos enunciados, o uso de letras e de variáveis para resolver equações, a construção de figuras geométricas, sua utilização heurística, a leitura e interpretação de gráficos cartesianos, os diagramas utilizados para representar conjuntos e relações, tabelas de números, etc. (Duval, 2013, p. 13).

Duval (2013) também se questionava se os alunos reconheciam o que permanecia nas atividades matemáticas quando aconteciam as transformações nas representações e o que era realmente pertinente. Essas questões deram um norte para continuação de sua pesquisa, na qual realizou um questionário sobre funções afins e lineares, considerando o reconhecimento das funções e a passagem de uma representação gráfica para a equação equivalente, o que resultou em um notável avanço na compreensão da atividade matemática e exploração cognitiva dos alunos. Para Duval (2013, p. 14),

> importância dos fenômenos de não-congruência na passagem de um tipo de representação para outro (sucesso de reconhecimento num sentido, mas, fracasso no outro), assim como a diferença radical de procedimentos matemáticos de acordo com o tipo de representação utilizada (língua natural, sistemas numéricos, escritas literais e simbólicas, figuras geométricas, gráficos cartesianos) mostra que, do ponto de vista cognitivo, a atividade matemática deveria ser analisada em termos de transformações de representações semióticas e não de conceitos puramente mentais, e, portanto, assemióticos.

O pesquisador salientava, ainda, que o que dificultava a aprendizagem dos alunos não era o conteúdo matemático e seus conceitos, mas, sim, a diversificação embaralhada de representações semióticas. Portanto, era necessário sair da teoria implícita de Piaget e encontrar de que forma seria possível agrupar, na atividade matemática, os dois tipos de representações semióticas – a cognitiva e a epistemológica. Foi com a ajuda de Frege e Saussure que tudo ficou elucidado.

Frege ajudou Duval a compreender que uma representação semiótica poderia ser transformada em outra representação semiótica, mesmo que ambas não tivessem conteúdos em comum; tratava-se de uma ligação sinal/objeto. Saussure auxiliou na importância da consideração da língua natural nas representações, sendo que não era importante ter em mente apenas a representação semiótica do objeto, mas todo o sistema de representação, seja na língua natural, nos sistemas numéricos, nas representações gráficas, etc.

Nesse contexto, Duval (2013) precisava diferenciar duas coisas distintas: os sistemas semióticos que são utilizados na matemática e os sistemas semióticos que são utilizados fora da área da matemática. Surgiu, então, o termo **registro**, por dois motivos: em primeiro lugar, porque a palavra registro foi utilizada por Descartes em suas obras; em segundo lugar, porque remete a modos de expressão. “[...] registro é um campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios” (Duval, 2012a, p. 266).

Além do termo registro, são vários os termos utilizados que precisam ser entendidos para a compreensão da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Começando pela própria palavra **semiótica**, que, segundo o dicionário, define-se como “Teoria de representação que, criada por Charles S. Pierce, considera os signos em seus modos de representações e de manifestações” (Dicio, 2022). Os **signos** são quaisquer tipos de representações, sejam com letras, números ou gestos; trata-se de particularidades usadas para dar sentido. As **representações** são conjuntos de signos com suas respectivas regras e ordens estabelecidas. As

transformações, também nomeadas por Duval (2012) como **gestos intelectuais**, são as conversões e os tratamentos da atividade matemática.

Segundo Duval (2013), existem dois lados da aprendizagem matemática que devem ser compreendidos, chamados de face exposta e face oculta. A **face exposta** abrange os objetos matemáticos e suas devidas regras e propriedades (frações, números, equações, inequações, etc.), que são desenvolvidas e ensinadas aos alunos no decorrer da vida estudantil. São competências que o aluno deve aprender ao finalizar os estudos, mesmo que os conteúdos sejam apenas "pré-requisitos" para o ano seguinte. **A face oculta**, assim chamada por não ser algo que se vê nitidamente e/ou diretamente, engloba os gestos intelectuais, ou seja, o que constitui, na matemática, o caráter cognitivo e epistemológico.

A face oculta aparece somente quando se dá atenção aos obstáculos e erros que os alunos encontram e cometem quando se mostra mais de um tipo de representação ou escrita do mesmo objeto, bem como representações semióticas de registros diferentes. Para facilitar o entendimento dos erros/obstáculos, eles são classificados de duas formas: os erros transitórios, que aparecem quando se aprende um conceito novo, os quais são erros específicos de um conteúdo; os erros transversais, que aparecem constantemente em qualquer conteúdo trabalhado. Esses erros tornam-se bloqueios para quaisquer avanços na aprendizagem matemática. Duval (2013, p. 21) considera que:

> Quando se permanece unicamente na face exposta da atividade matemática, procura-se explicar todas as dificuldades que os alunos encontram, como se fossem erros transitórios, decorrentes da complexidade epistemológica dos conceitos a serem adquiridos. Mas, as dificuldades mais profundas, aquelas que param a maioria dos estudantes na entrada da atividade matemática, não decorrem apenas de uma deficiência na aquisição de conceitos, mas de um desconhecimento total dos gestos intelectuais, quer dizer, de operações semi-cognitivas que são próprias da atividade matemática.

A TRRS diz respeito à face oculta da aprendizagem matemática, todavia também é inegável a importância de não confundir os objetos matemáticos com as representações semióticas utilizadas para representar esse objeto. O tamanho dessa importância, por outro lado, é o tamanho da dificuldade de compreender isso. O motivo é notório: a matemática é complicada, pois não contém ferramentas diretas para utilização ao acesso do objeto de conhecimento como as demais áreas possuem, por exemplo, telescópios e microscópios Sendo assim, Duval (2013) pondera que a matemática é dependente de uma produção de representação semiótica, e esse é o paradoxo cognitivo da matemática.

Muitas vezes, esse paradoxo não é percebido de imediato, pois se dá mais valor às representações mentais dadas por uma contextualização associada do objeto do que por representações semióticas que utilizam os signos, oportunizando significado ao objeto. O funcionamento cognitivo do pensamento humano, segundo Durval (2012, p. 270),

> se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação. Se é chamada “semiose” a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e “noesis” a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a noesis é inseparável da semiose.

Sendo assim, para compreender a atividade matemática, precisamos do entendimento do conceito do objeto e também das representações semióticas desse objeto. Para não confundir esse objeto com seus registros de representação, é fundamental proporcionar três atividades cognitivas que são ligadas à semiose: formação, tratamento e conversão.

1. Formação: É a representação de um registro pelo seu enunciado, na sua língua natural, uma forma compreensível de ser entendida. É a descrição de um problema e/ou atividade, isto é, as características do conteúdo envolvido. Para Duval (2012), a formação implica uma seleção de relações das informações e dos conteúdos que serão trabalhados, tendo a “função de unidades e de regras de formação que são próprias do registro cognitivo no qual a representação é produto” (Duval, 2012, p. 271).

Deve-se certificar, segundo Duval (2012), que na atividade de formação mantenham-se as regras (gramaticais, no caso da língua natural, de formação, no caso de um sistema formal, etc.), visto que elas possuem uma condição de identificação da representação, podendo, a partir do reconhecimento, efetuar os tratamentos.

2. Tratamento: É a transformação desse registro sem alterar a sua forma de representação, ocorrendo uma transformação interna do registro. Altera-se, portanto, o tipo de representação sem mudar o tipo de registro. Duval (2012) relata que existem, para cada tipo de registro, as regras de tratamento, que variam de um registro para outro, as quais exemplifica:

> A paráfrase e a inferência são formas de tratamento em língua natural. O cálculo é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: é uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras o seu papel heurístico. A anamorfose é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural (Duval, 2012, p. 272).

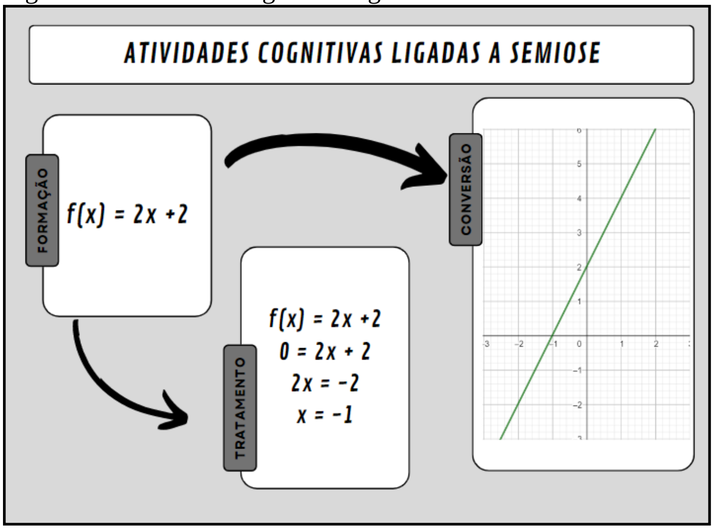
3. Conversão: É a transformação de uma representação em uma representação de outro registro. A conversão não depende do tratamento, pois se refere a uma mudança de registro.

Duval (2012) relata que, nessa representação da transformação do determinado registro, conserva-se total ou parcialmente o conteúdo da formação inicial, tendo como exemplos "a ilustração é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A tradução é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em outra representação linguística de outro tipo de língua" (Duval, 2012, p. 272).

Duval (2012) salienta que não se pode confundir a conversão com atividades relacionadas à codificação, visto que a primeira se refere a uma transcrição de uma representação em um sistema semiótico diferente e relacionada à interpretação, pois necessita de uma mudança de contexto, não mudando o tipo de registro. Sendo assim, segundo o autor, diferente da formação e do tratamento, na conversão não podem existir regras.

Para uma melhor assimilação, pode-se verificar essas atividades exemplificando-se: dado o enunciado "Seja uma função polinomial do 1º grau dada por $f(x) = 2x + 2$", encontre a raiz/zero da função e faça o esboço gráfico. A formação é o registro inicial: $f(x) = 2x + 2$, quando é efetuada a operação para encontrar a raiz/zero da função, ocorre a transformação desse mesmo registro. Ou seja, está sendo feito o tratamento dele ainda dentro da mesma representação. Quando essa função é analisada graficamente, acontece a conversão para uma representação de outro registro, que é a linguagem gráfica, nesse caso, uma reta. Na imagem apresentada na Figura 1, é possível visualizar facilmente o que ocorre.

Figura 1 - Atividades cognitivas ligadas à semiose



Fonte: Denardi, 2017 – elaborada pela autora, 2022.

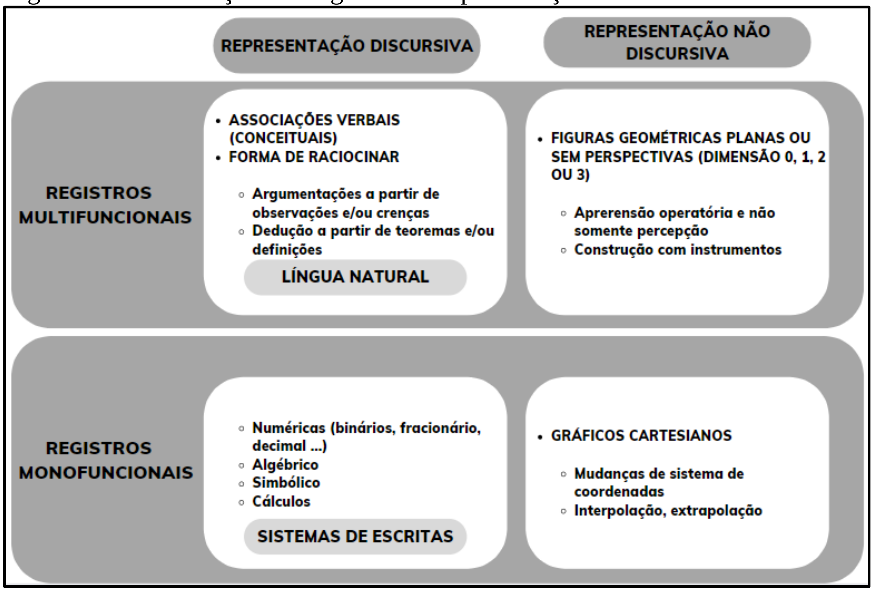
Normalmente, o que ocorre no ensino é a consideração apenas das duas primeiras atividades cognitivas ligadas à semiose, à formação e ao tratamento, sendo a atividade de conversão uma forma de tratamento simples, como substituições e construção de gráficos sem ligação. Para Duval (2013, p. 12),

> A conversão não tem nenhuma importância real para a compreensão dos objetos ou dos conteúdos representados, pois o seu resultado se limita a uma mudança de registro. Este ponto de vista é justificado desde que uma certa "autonomia" seja atingida no que concerne à atividade matemática. Mas, mascara a característica fundamental desta atividade para a noesis e, de maneira mais geral, para a compreensão. Além disso, negligencia o fato de que na aprendizagem a conversão desempenha um papel essencial na conceitualização e, para melhor percebê-la, examine-se o quanto a diversidade de registros de representação engloba.

Portanto, para que a semiose e a noesis andem juntas, é necessário ter como recurso vários sistemas de representações. Ressalta-se que, de fato, o que tem importância são os tratamentos que podem ser feitos nas representações e as mudanças de representações de registros, as transições entre elas, e não apenas a realização da mudança de registro.

Na Figura 2, estão discriminados os diferentes tipos de registros, classificados por Duval como registros multifuncionais e registros monofuncionais.

Figura 2 - Classificação dos registros de representação semiótica em matemática



Fonte: Silva, 2013 – adaptado pela autora, 2022.

Nos registros multifuncionais, os tratamentos não utilizam algoritmos, enquanto nos registros monofuncionais, os tratamentos são principalmente algoritmos. Nas representações discursivas, permite-se desenvolver o pensamento e, nas representações não discursivas, a assimilação do pensamento com outras dimensões. Logo, Duval trata de quatro tipos de registros de representação: a língua natural, os sistemas de escrita, as figuras geométricas e os gráficos cartesianos. Diferentes sistemas semióticos, na visão do autor, geram uma maior compreensão para o sujeito, fazendo com que ele reconheça o seu progresso cognitivo, não se tornando um "sucesso momentâneo". Ele ressalta:

> Ter sucesso, de um ponto de vista matemático, é alcançar um resultado matematicamente correto para uma pergunta ou um problema. No ensino, isso é avaliado em uma escala de tempo muito pequena, logo após a sequência de atividades que visava uma nova aquisição. Do ponto de vista cognitivo, ter sucesso é ser capaz de realizar com êxito a transferência de um conhecimento aprendido em situações totalmente diferentes e em jamais tê-las visto antes. Isso é avaliado numa outra escala de tempo muito maior, ou seja, com o decorrer dos anos e para além do término dos estudos (Duval, 2013, p. 20-21).

Para essa demanda de um tempo maior e aplicação do conhecimento em diferentes situações, bem como o domínio dos gestos intelectuais e as transições entre os conhecimentos, é necessário construir com os sujeitos uma aprendizagem significativa. Assim, pode-se alinhar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica com a Teoria da Aprendizagem Significativa, que será brevemente sintetizada a seguir.

2.2 Teoria da Aprendizagem Significativa

A Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) foi uma proposta do psicólogo da educação americano David Paul Ausubel (1918-2008). Médico psiquiatra de formação e professor emérito da Universidade de Columbia, em Nova York, ele propôs essa teoria pela indagação cognitiva em descobrir como os sujeitos aprendem, tendo como objetivo do processo de ensino a aprendizagem.

Ausubel estava muito decepcionado com a educação na década de 70, quando o ensino buscava memorizações e repetições, seguidas de xingamentos e castigos, como o próprio autor relata:

> Escandalizou-se com um palavrão que eu, patife de seis anos, empreguei certo dia. Com sabão de lixívia lavou-me a boca. Submeti-me. Fiquei de pé num canto o dia inteiro, para servir de escarmento a uma classe de cinquenta meninos assustados [...]. A escola é um cárcere para meninos. O crime de todos é a pouca idade e por isso os carcereiros lhe dão castigos (Ausubel, 1968, *apud* Prass, 2012, p. 27).

É notório, portanto, sua indignação e desilusão com o ensino da época. Contraditória ao Behaviorismo, que estudava a psicologia com base no comportamento, a Teoria da Aprendizagem Significativa considera que, para a aquisição de um novo conhecimento, é necessário que exista um conhecimento prévio, algo que o sujeito já possui. Além dessa prévia, é essencial usufruir de algumas condições para que isso aconteça.

Existem, no entanto, três tipos de aprendizagem: a cognitiva, a afetiva e a psicomotora. Segundo Moreira (1999), a aprendizagem que se sucede de um armazenamento organizacional das informações e conceitos diretamente na mente do indivíduo, ou seja, no seu cognitivo, chama-se aprendizagem cognitiva. A aprendizagem afetiva resulta das experiências do indivíduo, quaisquer que sejam elas – dor, sofrimento, angústias, felicidade, por exemplo; normalmente, seguem uma experiência cognitiva. A experiência psicomotora, por sua vez, é ligada a estímulos e respostas musculares, podendo ou não ter auxílio da aprendizagem cognitiva.

É preciso pontuar de início que a aprendizagem significativa diz respeito à sala de aula, ao dia a dia, isto é, uma aprendizagem em que haja organização e interação; logo, trata-se de uma aprendizagem cognitiva que acontece na cognição do sujeito. Partindo desse pressuposto, Moreira (1999) evidencia, segundo a visão ausebiliana, que:

> Para Ausubel, aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve integração da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como *conceito subsunçor*, ou simplesmente *subsunçor*[2], existente na estrutura cognitiva do indivíduo (Moreira, 1999, p. 153).

Dado o exposto, os conceitos que o aprendiz já conhece, que estão contidos na sua estrutura cognitiva, são chamados de conceitos subsunçores. De acordo com a concepção ausebiliana, subsunçores são conhecimentos e ideias existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Esses conceitos não são necessariamente de uma área específica, mas também o que o sujeito foi aprendendo com os pais, em casa, assistindo, na igreja, entre outras situações, são conceitos já aprendidos de alguma maneira. Os conceitos subsunçores podem ou não ser significativos para o aprendiz, e isso depende de como foram apresentados e de como eles se relacionam com novos conhecimentos. Os subsunçores poderão se modificar e evoluir, tornando-se cada vez mais vastos e ricos. Moreira (1999) assim os descreve:

> Nessa linha, subsunçores podem ser proposições, modelos mentais, construtos pessoais, concepções, ideia, invariantes operatórios, representações sociais e, é claro, conceitos, já existentes na estrutura cognitiva de quem aprende, subsunçores seriam, então, conhecimentos prévios especificamente relevantes para a aprendizagem de outros conhecimentos (Moreira, 2012, p. 10).

Diante disso, Moreira (1999) acrescenta que o conceito subsunçor é o processo onde uma informação nova se relaciona com uma já existente, ou que tenha certa relevância, que esteja na estrutura cognitiva do aprendiz, isto é, acontece uma interação da informação nova com uma informação já estruturada. A aprendizagem significativa ocorre quando, nesse processo, existe uma ancoragem, uma ligação entre a nova informação e as informações e conceitos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz. O autor também menciona que:

> A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Ausubel vê o armazenamento de informações no cérebro humano como sendo organizado, formando uma hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados (e assimilados) a conceitos mais gerais mais inclusivos (Moreira, 1999, p. 153).

Nessa direção, Ausubel (1968, *apud* Moreira, 1999) evidencia que é essencial conhecer os conceitos subsunçores, pois eles servem de âncora para um novo conhecimento, para uma nova informação, dando significado a eles. Na sua visão, o conhecimento prévio é primordial para que a aprendizagem significativa aconteça, assim salienta que "o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe; descubra isso e ensine-o de acordo" (p. 163).

Paralelamente, salienta-se que a estrutura cognitiva, "é o conteúdo total e organizado de ideias de um dado indivíduo" (Prass, 2012, p. 28). Assim, essas ideias vão se ligando conforme as interações estabelecidas, ancorando o que o estudante vai aprendendo. Todavia, essa interação precisa ser não linear e não arbitrária. Portanto, não se trata de explicar um conteúdo, posteriormente outro conteúdo e assim sucessivamente, como uma visão de escadas, em que um conteúdo só é aprendido por ser pré-requisito para um posterior, como normalmente acontece na matemática, mas, sim, levando em consideração uma aprendizagem fluida e autônoma.

O lado oposto da aprendizagem significativa é a aprendizagem mecânica ou aprendizagem automática. Esta, por sua vez, absorve novas informações, mas não há nenhum tipo de ligação com o que já existe na estrutura cognitiva do aprendiz. É feita uma memorização do conceito e fórmulas, em que o armazenamento dessas informações se dá de forma não arbitrária (sem fundamentação, sem uma lógica estrutural, sem razão), não havendo nenhuma ligação com conceitos subsunçores específicos. Apesar de lados contrários, a aprendizagem mecânica pode vir a se tornar uma aprendizagem significativa. Para Ausubel (2003), isso acontece, pois, quando um indivíduo vai adquirir uma informação integralmente nova e distante de seus convívios, necessita de elementos para que essas informações se tornem subsunçores, mesmo que com pouca organização e sustentação. Conforme essas aprendizagens vão sendo fixadas, tornando-se significativas de alguma forma, podem servir como âncoras para novas aquisições e conhecimentos, transformando-se em aprendizagem significativa.

Para que a aprendizagem significativa se suceda mais facilmente após a identificação dos subsunçores existentes na estrutura cognitiva do aprendiz, recomenda-se a utilização de organizadores prévios. De acordo com Moreira (1999, p. 155), "o uso de organizadores prévios é uma estratégia proposta por Ausubel para, deliberadamente, manipular a estrutura cognitiva, a fim de facilitar a aprendizagem significativa". Essa facilidade vem, segundo o autor, a partir da utilização de materiais introdutórios que fazem uma interação, ou seja, servem de ponte do que o aprendiz já sabe para o que ele aprenderá.

Deve-se destacar que: "A função do organizador prévio é potencializar a criação de relações não-arbitrárias e substantivas entre os novos conceitos e as ideias que lhe servirão de âncora na estrutura cognitiva do aluno, através da "inserção" ou da explicitação destas ideias" (Prass, 2012, p. 33). Portanto, dois tipos de organizadores podem ser manuseados: expositivos e comparativos. Segundo Moreira (2018, *apud* Darroz; Loreian; Rosa, 2020), indica-se a utilização do primeiro quando os subsunçores não estão formados no cognitivo do aprendiz, isto é, quando se trata de material de aprendizagem completamente novo. Quando o material é familiar ao aprendiz, indica-se a utilização do operador comparativo, que auxiliará na ligação dos conhecimentos existentes aos conhecimentos novos.

De acordo com Ausubel (2003), para que a aprendizagem significativa ocorra, são necessárias duas condições básicas. A primeira condição diz respeito ao material utilizado, o qual precisa ser potencialmente significativo, ou seja, além de o aluno ter em sua estrutura cognitiva os subsunçores apropriados e "o material a ser aprendido seja relacionável (ou incorporável) à estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não-arbitrária e não literal" (Moreira, 1999, p. 156), precisa ter uma lógica relevante, ou seja, precisa ser organizado, conter regras e não ser simplesmente "ao pé da letra". O material deve ser capaz de levar o aprendiz a fazer essa ligação, estar estruturado, conseguir identificar os conceitos subsunçores e levar o aluno a interagir com o novo conhecimento.

A segunda condição é que "o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar, de maneira substantiva e não-arbitrária, o novo material, potencialmente significativo, à sua estrutura cognitiva" (Moreira, 2016, p. 11-12). Isso significa que o sujeito precisa querer aprender novos conhecimentos, pois, mesmo que o material seja potencialmente significativo e a intencionalidade do aprendiz seja simplesmente uma memorização arbitrária e linear, a aprendizagem torna-se mecânica (Moreira, 2016).

Se ambas essas condições forem desempenhadas, os objetos de conhecimento trabalhados poderão construir no aprendiz o engrandecimento humano e a estimulação para que continuem buscando conhecimento cada vez mais, e a aprendizagem é significativa. Se uma delas, por algum motivo, não vier a acontecer ou a se desenvolver, independentemente de qual seja, a aprendizagem caracteriza-se como mecânica. Portanto, ambas as partes devem estar envolvidas e engajadas: professor e aluno. O professor ausubeliano deve facilitar a aprendizagem do aprendiz, ser um mediador e não apenas um repassador de conteúdos que impõe estruturas conceituais, mas facilitar a aquisição significativa para não se tornar linear, propondo, portanto, uma hierarquia, preparando o material adequadamente e identificando os subsunçores (Moreira, 1999).

No decorrer do processo de aprendizagem significativa, realiza-se a interação entre os conhecimentos existentes na estrutura cognitiva do aprendiz e os novos conhecimentos, ocorrendo interações, as quais são passíveis de se tornarem cada vez mais enriquecedoras e capazes de ancorar novos conhecimentos com maior intensidade. Ausubel denomina esse processo como Teoria da Assimilação, cuja premissa é analisar como as informações interagem na estrutura cognitiva do aprendiz, em um processo natural de retenção e esquecimento. Segundo o autor, os processos de assimilação da aprendizagem significativa:

> (1) ancoragem selectiva do material de aprendizagem às ideias relevantes existentes na estrutura cognitiva; (2) interacção entre as ideias acabadas de introduzir e as ideias relevantes existentes (ancoradas), sendo que o significado das primeiras surge como o produto desta interacção; e (3) a ligação dos novos significados emergentes com as ideias ancoradas correspondentes no intervalo de memória (retenção) (AUSUBEL, 2003, p. 8).

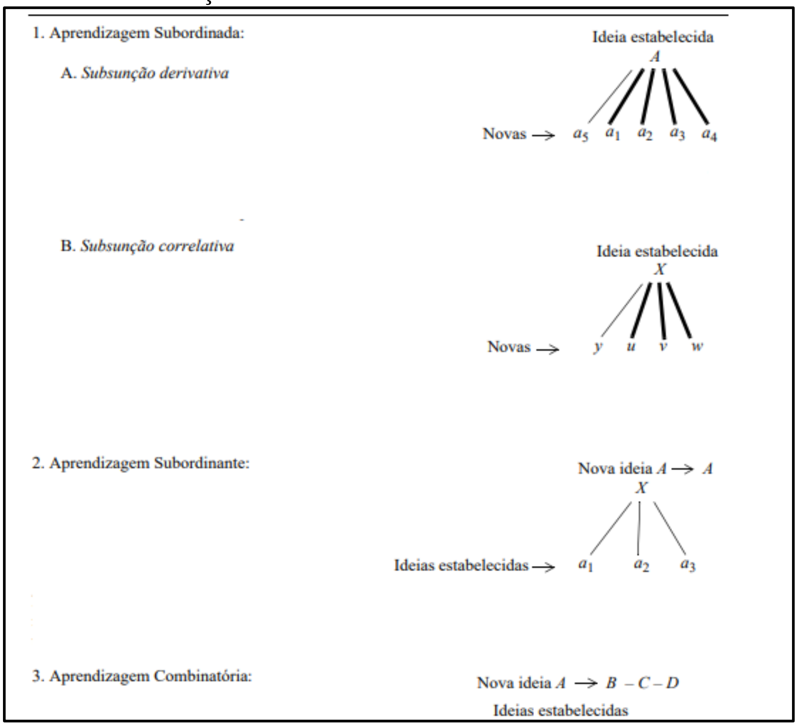
Ausubel (2003) afirma que a teoria da assimilação é de extrema valia para explicar os processos naturais da aprendizagem e das retenções, visto que consegue esclarecer a aquisição, a retenção e o esquecimento das ideias aprendidas significativamente. Além de ajudar na organização dos conhecimentos na estrutura cognitiva do aprendiz, a assimilação das ideias também pode favorecer a retenção de três formas diferentes: primeiramente, pelo processo de ancoragem, em que as informações vão se modificando e se tornando cada vez mais estáveis e passíveis de ligar-se com novos conhecimentos; em segundo lugar, por ser um processo contínuo, pois os significados formados com a ancoragem continuam evoluindo sem excluir o que já está estruturado cognitivamente, tornando-se mais magnificente; em terceiro lugar, Ausubel afirma que o armazenamento significativo que está ligado com informações e/ou ideias particulares presentes na estrutura cognitiva do aprendiz tornam possível a recuperação das informações, um pouco menos arbitrárias e de forma mais sistemática.

Vale ressaltar que existem níveis nos quais a assimilação não pode ser recuperada:

> A assimilação explica o fenómeno do esquecimento (ou perda de capacidade de recuperação em relação ao significado recentemente aprendido), colocando a hipótese de que a particularidade e especificidade únicas do último significado são afastadas (obliteradas), em vários graus, pela generalidade das respectiva(s) ideia(s) ancorada(s) (Ausubel, 2003, p. 107).

A Figura 3 mostra as formas de aprendizagem significativa a partir da teoria da assimilação, na qual as ideias potencialmente significativas se relacionam, seletivamente, com ideias pertinentes já existentes na estrutura cognitiva.

Figura 3 - Formas de Aprendizagem Significativa tal como concebidas na Teoria da Assimilação



Fonte: Ausubel, 2003, p. 111.

Conforme mostra a Figura 3, no primeiro cenário – aprendizagem subordinada alusiva à subsunção derivativa –, a ideia estabelecida A possui uma ligação com uma nova informação a_5 de forma subordinada e representa a ampliação ou outro caso de A. Nessa situação de assimilação, os critérios do conceito de A não se alteram, mas reconhecem as novas informações e/ou novos exemplos como sendo relevantes. Na aprendizagem subordinada relativa à subsunção correlativa, a ideia y está ligada à ideia X, podendo ser uma ampliação, modificação ou qualificação de X. Os critérios do conceito de subsunção podem modificar-se ou ampliar-se com a nova subsunção correlativa.

No segundo cenário – aprendizagem subordinante –, as ideias a_1, a_2 e a_3 se reconhecem como exemplos específicos e ligados à nova ideia A. Assim, nessa assimilação, a ideia subordinante A designa-se por um novo conjunto de atributos de critérios que conduzem as ideias a_1, a_2 e a_3. No último cenário – aprendizagem combinatória –, a nova ideia A relaciona-se com ideias já existentes: B, C e D. A nova ideia A tem certos atributos de critérios em comum com as ideias existentes, não sendo, nesse processo de assimilação, uma ideia mais inclusiva ou mais específica que as preexistentes B, C e D.

Ausubel ainda relata que, por ser um processo natural de aprendizagem, as informações existentes vão se relacionando e se fortalecendo com as novas informações, construindo, assim, significados mais concretos. Esses significados são armazenados na memória do aprendiz, ancorando novas informações; portanto, é normal o procedimento de retenção da informação, conservando-as na estrutura cognitiva do aprendiz.

Na aprendizagem significativa, apesar de possuir subsunçores bem formados e ricos em conceitos e significados, as informações armazenadas podem ser esquecidas na medida em que não forem usadas, conforme suas relevâncias, havendo uma obliteração. Essa perda é um processo normal de esquecimento das informações presentes na estrutura cognitiva do sujeito, mas, como a aprendizagem é significativa, é possível reaprender de forma rápida, uma vez que o esquecimento foi apenas parcial. Caso o sujeito tenha um esquecimento total, é provável que a aprendizagem tenha sido mecânica. Para Ausubel (2003, p. 8), “A aprendizagem significativa constitui apenas a primeira fase de um processo de assimilação mais vasto e inclusivo, que também consiste na própria fase sequencial natural e inevitável da retenção e do esquecimento”.

De acordo com Moreira (2012), existem três tipos de aprendizagem significativa – representacional, de conceitos e proposicional – e três formas de aprendizagem significativa – por subordinação, por superordenação e combinatória. A aprendizagem significativa é de forma subordinada quando as novas informações adquiridas pelo aprendiz passam a ter significados a partir do processo de ancoragem, com as interações do que o aprendiz conhece e o que vai aprender, ou seja, a partir dos seus conhecimentos prévios contidos na estrutura cognitiva. Trata-se da forma mais comum de aprendizagem. Quando não há esse processo de ancoragem, pois a informação é completamente desconhecida pelo aprendiz, ele necessita aprender fazendo as ligações, buscando alguma semelhança ou comparação com alguma coisa por meio do raciocínio indutivo; nesse caso, trata-se de uma aprendizagem significativa de forma superordenada, que é a forma mais frequente na conceitualização. Ainda segundo o autor, "A aprendizagem superordenada envolve, então, processos de abstração, indução, síntese, que levam a novos conhecimentos que passam a subordinar aqueles que lhes deram origem. É fundamental para a aquisição de conceitos [...] (Moreira, 2012, p. 15). Quando a aprendizagem significativa não é de forma subordinada e nem superordenada, denomina-se combinatória; nesse caso, o que existe na estrutura cognitiva do aprendiz não é suficiente para tornar as novas informações significativas, necessita de interações com vários conhecimentos mais aprofundados que lá existem.

Tratando-se dos tipos de aprendizagem, a essencial é a aprendizagem representacional, em que o sujeito atribui o significado a determinados símbolos de objetos ou eventos, ou seja, "[...] o símbolo significa apenas o referente que representa" (Moreira, 2012, p. 16). A aprendizagem conceitual é a evolução da aprendizagem representacional; o sujeito consegue realizar regularidades, não dependendo apenas do símbolo dos objetos ou eventos, mas consegue contextualizá-los. A última, mas não menos importante, é a aprendizagem proposicional, que, para existir, necessita da aprendizagem representacional e conceitual. O significado das informações dá-se pelas proposições, não apenas por conceitos e palavras atribuídas a elas.

As formas e os tipos de aprendizagem se relacionam da seguinte forma, segundo Moreira (2021, p. 16-17):

> A aprendizagem proposicional pode ser subordinada, superordenada ou combinatória. Analogamente, a aprendizagem conceitual pode ocorrer por subordinação, superordenação ou combinação, relativamente a conhecimentos prévios existentes na estrutura cognitiva. Isso sugere que as formas e tipos de aprendizagem significativa são classificações plenamente compatíveis.

A estrutura cognitiva, por ser organizada e hierárquica, possui, de acordo com Moreira (2012), dois processos de caracterização: a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. Na diferenciação progressiva, os conhecimentos prévios existentes vão evoluindo e enriquecendo conceitualmente; de maneira progressiva, vão ganhando mais significados e ancorando cada vez mais novas aprendizagens significativas. No caso da reconciliação integradora, ela trata de eliminar as diferenças conceituais e integrar os significados. Ambos os processos presentes na estrutura cognitiva devem ser trabalhados juntos. Nesse sentido, o autor relata:

> Quando aprendemos de maneira significativa temos que progressivamente diferenciar significados dos novos conhecimentos adquiridos a fim de perceber diferenças entre eles, mas é preciso também proceder a reconciliação integradora. Se apenas diferenciarmos cada vez mais os significados acabaremos por perceber tudo diferente. Se somente integrarmos os significados indefinidamente, terminaremos percebendo tudo igual. Os dois processos são simultâneos e necessários à construção cognitiva, mas parecem ocorrer com intensidades distintas. A diferenciação progressiva está mais relacionada à aprendizagem significativa subordinada, que é mais comum, e a reconciliação integradora tem mais a ver com a aprendizagem significativa superordenada que ocorre com menos frequência (Moreira, 2012, p. 7).

Em vista disso, é essencial promover os dois processos na aprendizagem do sujeito, sendo que a diferenciação progressiva deve ser promovida no início das aulas, a partir dos conhecimentos prévios e de forma contínua, explorando as semelhanças e diferenças entre os conceitos aprendidos e o que já havia sido estruturado cognitivamente, eliminando as diferenças conceituais. O processo inicial da aula pode ser feito com exercícios, situações problemas e exemplos, desde que façam o aprendiz interagir e progredir com os significados.

De acordo com a TAS, é indispensável que o professor siga quatro tarefas essenciais: 1ª) identificar a estrutura conceitual da matéria de ensino; 2ª) identificar os subsunçores relevantes ao conteúdo a ser ensinado; 3ª) diagnosticar o que o aluno já sabe, identificando relevância dos subsunçores; 4ª) utilizar recursos que facilitem a aquisição da estrutura conceitual, promovendo interação entre os conhecimentos (Moreira, 1999).

Todavia, não é tão simples identificar se a aprendizagem foi ou não significativa. Para verificá-la, o papel do professor é extremamente importante, devendo auxiliar o aluno a assimilar o conteúdo. Para Ausubel (2003), a única maneira de avaliar se a aprendizagem foi significativa é promover situações diferenciadas das trabalhadas em aula. “Por conseguinte, os testes de compreensão devem, no mínimo, ser expressos em diferentes linguagens e apresentados num contexto algo diferente do material de aprendizagem originalmente encontrado” (p. 30).

O ideal é que o aprendiz esteja diante de situações-problema diferentes para sua avaliação, pois, se aprendeu, de fato, determinado conteúdo, conseguirá, a partir das ancoragens com seus subsunçores, aplicar esse conhecimento em situações nunca vistas. Também são válidas as avaliações verbais, fazendo com que o sujeito fale sobre o que aprendeu, transformando o seu conhecimento, pois, se ele consegue dialogar e aplicar os conceitos aprendidos em situações diferenciadas das trabalhadas, têm-se indícios de que a aprendizagem foi significativa. Contudo, vale ressaltar que:

> em certas situações, se os alunos, realmente, compreenderam significativamente as idéias que são capazes de verbalizar. Ele mesmo, porém, chama atenção para o fato de que se o aprendiz não for capaz de resolver um problema, isso não significa, necessariamente, que tenha apenas memorizado os princípios e conceitos relevantes à solução do problema, pois esta envolve, também, o uso de outras habilidades, além da compreensão (Moreira, 2016 p. 17).

Igualmente, o sujeito pode atingir altas etapas de aprendizagem significativa ao longo da sua vida, uma vez que os conhecimentos existentes na estrutura cognitiva continuam evoluindo e interligando-se mesmo com o findar do período escolar. Dessa forma, tratando-se desse período no âmbito escolar, ambos – professor e aluno – devem estar engajados para que o processo de aprendizagem seja satisfatório e significativo, de modo que:

> Professores podem encorajar a aprendizagem significativa usando tarefas que irão engajar o estudante na busca de conexões entre o seu conhecimento prévio e o novo conhecimento, usando estratégias de avaliação que premiam a aprendizagem significativa (Tavares, 2006, p. 10).

Em síntese, a TAS destaca a importância de o ensino ser significativo, tendo como premissa os conhecimentos prévios do aprendiz, existentes em sua estrutura cognitiva. O conhecimento adquirido torna os sujeitos mais autônomos, fazendo a união entre eles e o meio em que vivem, considerando suas culturas, crenças, experiências e o que cada ser humano está disposto a aprender.

2.3 Estudos Relacionados

Com a intencionalidade de compreender como a presente investigação vem sendo notada e tratada na contemporaneidade, buscou-se a realização de estudos que assessorassem a pesquisa quanto à abordagem dos números racionais à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS).

Paulo Freire nos traz uma reflexão sobre o ensinar que exige pesquisa:

> Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Esses quefazeres se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo, educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade (Freire, 2016, p. 30-31).

À vista disso, procurou-se analisar os trabalhos de pós-graduação desenvolvidos no Brasil, nos quais houvessem temas relacionados com a presente proposta. Essa busca teve como premissa a fonte de pesquisa do Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Estabeleceu-se, portanto, os termos "representações semióticas", "AND" e "racionais", totalizando 8 resultados, porém, nem todos favoreciam o objetivo. Explorou-se, então, as laborações com os termos envolvendo frações e representações semióticas.

Na listagem apresentada no Quadro 1, estão relacionados os trabalhos sondados, a partir de suas ordens cronológicas de publicação, destacando em cada um dos casos o título do trabalho, ano de publicação, tipo, programa de pós-graduação e o autor.

Quadro 1 - Dissertações investigadas na revisão de estudos

TÍTULO	ANO	TIPO	PROGRAMA	AUTOR
Contribuições dos registros de representação semiótica para a compreensão dos números decimais: um estudo com alunos do 6º ano	2015	Dissertação	Educação Para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá	Flavia Cheroni da Silva Brita
Formalização dos Conjuntos Numéricos: contribuições para o ensino de frações e números decimais	2015	Dissertação	Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto	Cleber Alves Cortes
Múltiplos aprendizados no ensino de frações e números decimais na educação básica	2018	Dissertação	Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo	Geyson Suzano
Modelagem matemática na perspectiva sociocrítica e os registros de representação semiótica na formação do conceito de número racional	2018	Dissertação	Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo	Silvana Cocco Dalvi
Os jogos digitais como qualificadores da aprendizagem de frações	2018	Dissertação	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Passo Fundo	Leandro Boszko
Conversões entre representações de números racionais: limites e possibilidades no uso de material manipulável	2019	Dissertação	Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco	Wellington José de Arruda
Um estudo sobre a aprendizagem dos números racionais à luz da teoria dos registros de representação semiótica	2019	Dissertação	Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul	Alexandre Padilha
As contribuições das tecnologias digitais e das representações semióticas na aprendizagem de números racionais com estudantes do 6° ano	2020	Dissertação	Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Acre	Mirian Silva Ferreira

Fonte: Capes (2015-2020) – elaborado pela autora, 2022.

A primeira dissertação arrolada para este estudo é intitulada "Contribuições dos Registros de Representação Semiótica para a Compreensão dos Números Decimais: Um Estudo com Alunos do 6° Ano". Ela foi elaborada por Flavia Cheroni da Silva Brita e apresentada, em 2015, ao Programa de Pós-Graduação de Educação para a Ciência e a Matemática da

Universidade Estadual de Maringá. Tal dissertação teve como propósito favorecer a aprendizagem dos números racionais baseado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval.

Outro aporte teórico que conduziu a metodologia desta dissertação foi a Teoria da Engenharia Didática, uma sequência de atividades de conversão dos números através da representação semiótica, tais como: numérico decimal, numérico fracionário, numérico na forma de porcentagem, numérico com significado monetário, figuras discretas e figuras contínuas. Foram analisadas as dificuldades dos alunos e também alguns relatos de professores para iniciar as atividades, que, por sua vez, envolviam situações do cotidiano, como por exemplo, a altura dos alunos. Os alunos podiam se apoiar em um material dourado na forma de desenho impresso. Os resultados obtidos demonstram que essas atividades de conversão favoreceram a familiaridade dos alunos com os números racionais, fazendo com que compreendessem melhor esse conjunto numérico.

A dissertação de Mestrado Profissional de Cleber Alves Cortes, publicada no ano de 2015 através do Programa de Pós-Graduação de Matemática em Rede Nacional, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, trouxe uma forma prazerosa de trabalhar matemática em sala de aula. Denominada “Formalização dos Conjuntos Numéricos: Contribuições para o Ensino de Frações e Números Decimais”, conduziu uma série de atividades concretas e divertidas, através de um plano de ensino que se desenvolve durante um ano letivo completo, com 200 aulas, sendo que as frações sempre são diluídas nesses contextos, trazendo a matemática na vida cotidiana.

Formalmente, abrangeram-se todos os conjuntos numéricos com suas devidas relações de ordens e operações. Conduziram-se várias atividades relacionadas a todo esse progresso do ano letivo, bem como atividades práticas, jogos virtuais, exemplos com materiais manipuláveis, jogos diversos e vídeos, instigando no aluno o interesse em aprender.

O próximo trabalho selecionado – dissertação de Mestrado Profissional defendida no Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo, escrito por Geyson Suzano, publicado em 2018 – resgata a história. Nomeada como “Múltiplos Aprendizados no Ensino de Frações e Números Decimais na Educação Básica”, a pesquisa buscou uma percepção de como o ensino é feito e qual a história dos números fracionários e decimais, bem como a necessidade de introdução deles na sociedade.

A importância dessa contribuição histórica de como surgiram esses números trouxe toda a ideia dos números racionais, com a fração bem explorada, vai além de seu significado e classificações, uma vez que mostra, de forma explícita, um número como parte de um todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

A aplicação foi feita com alunos de diversas faixas etárias, sendo 5° e 9° ano do Ensino Fundamental, 3° ano do Ensino Médio e também uma pesquisa com os respectivos professores. As atividades são alinhadas conforme cada contexto de sala, com os conteúdos que estavam sendo tratados, mas o trabalho inicial foi a aplicação de um questionário, para verificar como estavam os conhecimentos dos alunos quanto a frações, decimais e porcentagem. As abordagens foram, dentre outras, o Tangram para ver a porcentagem, diálogos construtivos, a situação problema dos camelos, onde trabalha-se a fração e também questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática (OBMEP). Essas diferentes situações forneceram aos alunos os conceitos necessários para o aprendizado de fração; logo, são sugeridas ao final do trabalho melhoria nos conceitos fracionários.

A quarta dissertação estudada, também profissional, foi de Silvana Cocco Dalvi (2018), intitulada "Modelagem Matemática na Perspectiva Sociocrítica e os Registros de Representação Semiótica na Formação do Conceito de Número Racional" e apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo.

Baseada na TRRS, buscou a análise da formação de conceito de número racional a partir da modelagem matemática, levando em consideração a perspectiva sociocrítica. O contexto social extraído da realidade dos alunos do 8° ano do Ensino Fundamental foi o consumo de água. Foram trabalhadas as conversões dos números racionais conforme os dados que os alunos traziam. Essa forma de modelagem favoreceu o aprendizado dos alunos, pois, além de um conceito social e prático, a elaboração das atividades fez com que compreendessem o conceito do número racional. A consequência dessas elaborações da autora resultou em um guia didático de teoria e prática.

A quinta laboração verificada foi uma dissertação profissional nomeada "Os Jogos Digitais Como Qualificadores da Aprendizagem de Frações", publicada em 2015 por intermédio do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Passo Fundo, escrita por Leandro Boszko. Teve como intenção a utilização de jogos digitais no ensino das representações de um mesmo número, potencializando sua compreensão.

O processo preliminar deu-se pelo apontamento dos conhecimentos prévios dos alunos, uma forma dialogada e expositiva. Por conseguinte, os jogos digitais foram sendo inseridos, correspondendo aos conteúdos de adição, subtração, equivalências e reduções de frações. Esse método resultou na compreensão do aluno através da ludicidade, provando que uma singela aplicação de jogos digitais dentro de uma metodologia tradicional contribui bastante para a aprendizagem dos alunos.

O sexto trabalho apresentado nesta seção tem como título “Conversões Entre Representações de Números Racionais: Limites e Possibilidades no Uso de Material Manipulável", de Wellington Jose de Arruda Melo, publicada em 2019, a partir do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco. Trata-se de dissertação acadêmica, cujo objetivo é analisar o uso de materiais manipuláveis nas conversões dos números racionais. A experimentação piloto foi aplicada com alunos de 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública.

O aporte teórico baseou-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). A partir dessas diversas representações, foram utilizados o jogo “Corrida dos Racionais”, um material dourado adaptado, uma régua numérica, discos de frações e pastilhas plásticas. O jogo acabou não sendo aplicado, pois alguns alunos já eram mais velhos, então, foram selecionadas algumas atividades pertinentes que poderiam acontecer no jogo e passíveis de necessitarem uma conversão dentro do conjunto numérico. A partir das aplicações, reconheceu-se que o uso no material dourado adaptado foi mais atrativo. Constatou-se, por fim, que a utilização de materiais manipuláveis no estudo de conversão dos números racionais é mais eficiente para a aprendizagem do discente.

Analogamente, a dissertação profissional seguinte é de Alexandre Padilha, com o título “Um estudo sobre a aprendizagem dos Números Racionais à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica”, apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências de Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul. Publicada em 2019, nos mostra uma sequência de atividades aplicadas em um sétimo ano no Ensino Fundamental. A comparação dos conteúdos dos documentos regentes de acordo com o estado em questão trouxe para dentro da sala de aula várias tarefas pertinentes.

Iniciando pelos conhecimentos prévios dos alunos, buscou-se analisar o que eles já conheciam para, posteriormente, proporcionar uma conversa. Baseando-se em um caderno de recuperação, foram aplicadas várias tarefas envolvendo diversas representações dos números do dia a dia. O autor relata a pouca quantidade de trabalhos executados nessa área. Após as aplicações dessas atividades, concluiu-se que a Teoria de Raymond Duval contribui para a aprendizagem desse tema.

O último e não menos importante trabalho de dissertação profissional foi publicado em 2020, de autoria de Mirian Silva Ferreira, e intitulada “As Contribuições das Tecnologias

Digitais e das Representações Semióticas na Aprendizagem de Números Racionais com Estudantes do 6º Ano”. Apresentada no Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Acre, tem como objetivo a utilização das tecnologias digitais baseada na TRRS.

A partir de um site, foram analisados jogos virtuais envolvendo frações, representações decimais e porcentagem. Esses jogos aparecem na forma de barras e também como forma de “encontrar pares”, em que há uma fração e é necessário encontrar o valor decimal correspondente, dentre outros. A aplicação também foi baseada na Teoria da Engenharia Didática para descrever os caminhos necessários para a contribuição da aprendizagem dos alunos. Mediante essas intervenções de jogos digitais e utilização de softwares captaram que as transformações dentro de um mesmo registro de diferentes representações auxiliaram os alunos de tal forma que foi possível a criação de um blog educacional.

Ao findar os estudos acerca destas oito dissertações relacionadas, que prestam um suporte à presente pesquisa, notou-se que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica contribui para a aprendizagem dos números racionais. Contudo, esse aporte teórico está alinhado a outras metodologias e técnicas. Também podemos evidenciar que existem poucos relatos sobre essa área, e, dos existentes, nenhum explana a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS). Baseando-se nessas situações, faz-se necessário um olhar diferenciado, em virtude de que a conexão entre essas duas teorias possa viabilizar um entendimento considerável ao aluno a longo prazo. Cria-se, assim, um instinto investigativo para explorar esses temas que são de suma importância.

Paulo Freire nos fala o porquê buscar mais, conhecer e motivar a curiosidade:

> Como professor devo saber que sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo nem ensino. Exercer a minha curiosidade de forma correta é um direito que tenho como gente e a que corresponde o dever de lutar por ele, o direito à curiosidade. Com a curiosidade domesticada posso alcançar a memorização mecânica do perfil deste ou daquele objeto, mas não o aprendizado real ou o conhecimento cabal do objeto. A construção ou a produção do conhecimento do objeto implica o exercício da curiosidade, sua capacidade crítica de “tomar distância” do objeto, de observá-lo, de delimitá-lo, de cindi-lo, de “cercar” o objeto ou fazer sua aproximação metódica, sua capacidade de comparar, de perguntar (Freire, 2016, p. 83).

É perceptível que precisamos estar sempre dispostos a aprender coisas novas, tentar incentivar nossa curiosidade e empenharmo-nos em constituir essas ligações teóricas e metodológicas. O conhecimento é algo único, que ninguém pode nos tirar.

3 A PROPOSTA

O presente capítulo tem a intencionalidade de descrever o produto educacional que visa o desenvolvimento de aprendizagem sobre o conjunto dos números racionais, introduzido no sexto ano do Ensino Fundamental. Nele também será explanada a implementação da proposta junto a um grupo de estudantes da rede estadual.

É importante destacar que, para o desenvolvimento deste projeto, relacionou-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS). Com suporte nisso e a partir dos estudos relacionados efetivados, nota-se que não há menções, interações ou quaisquer tipos de estudos indicando alguma conexão entre elas; sendo assim, a proposta didática envolverá o aporte teórico de ambas as teorias, brevemente associadas a seguir.

3.1 Relação entre TRRS e TAS: a construção da sequência didática

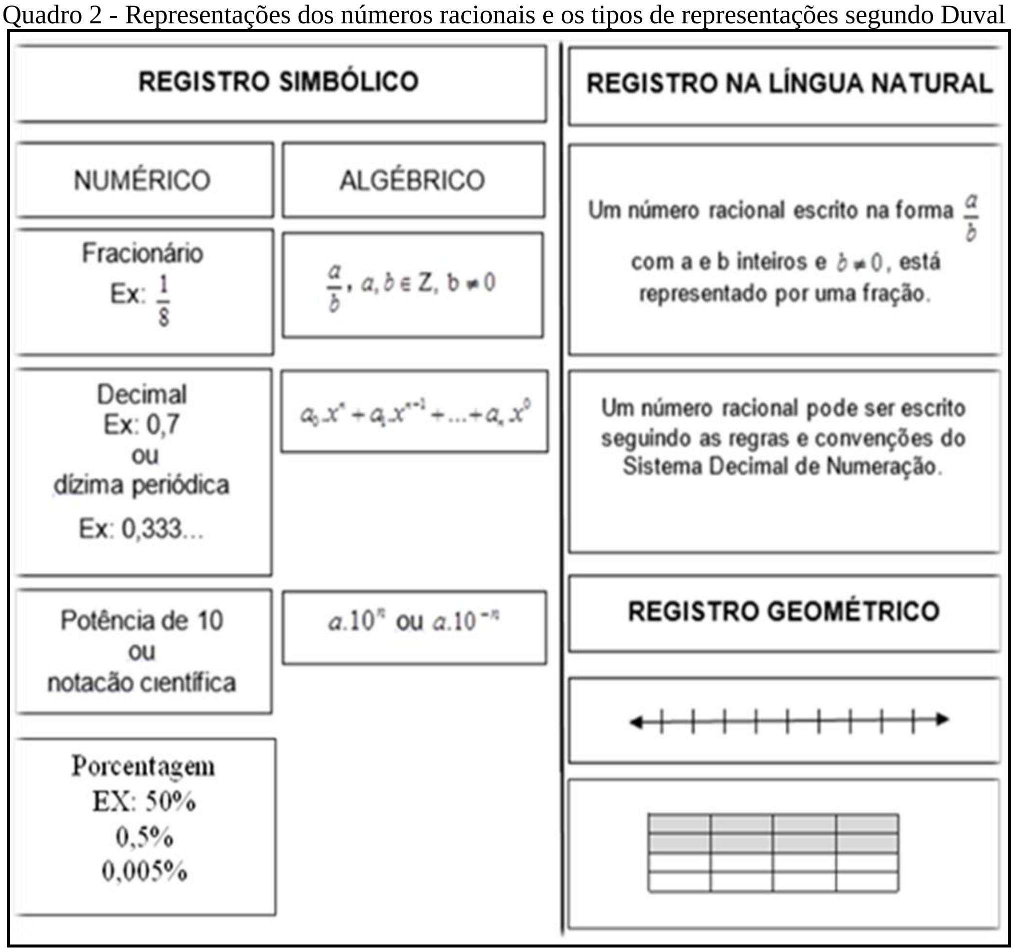
O conjunto dos números racionais é um conteúdo programático iniciado nos anos finais do Ensino Fundamental, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), proporcionando a inserção de noções imprescindíveis aos aprendizes. Os números racionais são de extrema importância para a aprendizagem dos estudantes, sendo utilizados em diversas áreas de conhecimento e, principalmente, no cotidiano de cada sujeito. Em consonância a isso, é preciso que o pilar desse conteúdo, iniciado no sexto ano do Ensino Fundamental, seja trabalhado de modo que o aluno compreenda o conteúdo e não apenas o memorize mecanicamente.

Para tal compreensão e entendimento sobre as representações dos números racionais no sexto ano, a proposta visa promover a aprendizagem significativa. A TAS tem como premissa demonstrar que a aprendizagem significativa tem mais valia do que a aprendizagem mecânica, em virtude de ter como princípio a construção de ancoragens entre os conhecimentos prévios do aprendiz, com as novas informações a serem aprendidas, tornando a aprendizagem duradoura. Para promover a aprendizagem significativa, a proposta precisa conter a identificação dos subsunçores dos sujeitos, a utilização de organizadores prévios para efetuar as ligações em sua estrutura cognitiva, diferenciar progressivamente os conceitos e após reconciliá-los integradamente. Para isso, Ausubel (2003) indica que, nesse processo, são essenciais a utilização de materiais potencialmente significativos e a disposição do aprendiz em estudar.

Trabalhar com as representações dos números racionais sem mencionar a TRRS é muito difícil, dado que até os professores que desconhecem essa teoria podem fazer sua utilização para elucidar o conteúdo. Esse conjunto numérico possui mais de uma forma de escrita, sendo possível ser representado em língua natural, na forma numérica fracionária, decimal, percentual e número natural ou em uma representação geométrica, em que cada representação contém suas regras, seus cálculos e suas definições.

Duval (2012) afirma que existem quatro tipos de registros de representações semióticas – a língua natural, os sistemas de escrita, as figuras geométricas e os gráficos cartesianos – e é importante o sujeito compreender todos para uma construção significativa do conteúdo. Essas representações, conforme ilustra o Quadro 2, relacionam-se facilmente com as representações dos números racionais.

Quadro 2 - Representações dos números racionais e os tipos de representações segundo Duval

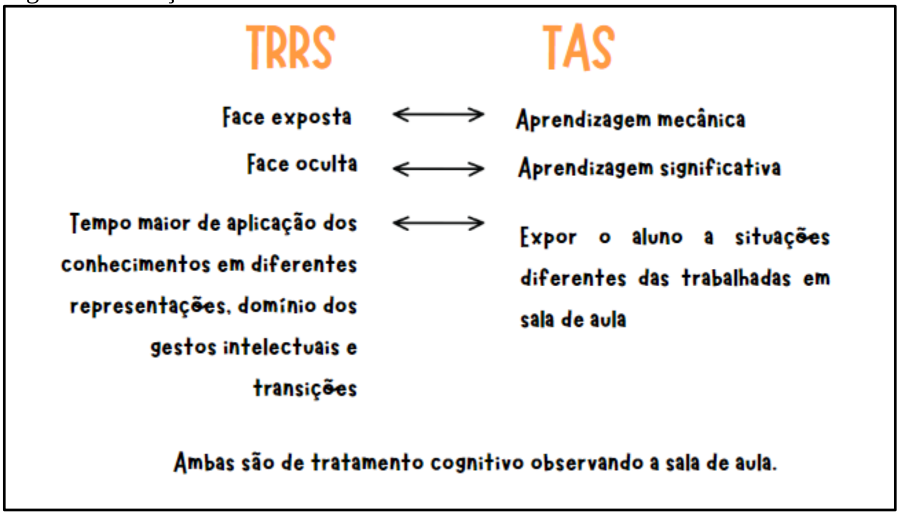


Fonte: Maranhão; Igliori (2011, *apud* Andrade, 2016) – adaptado pela autora, 2022.

Desse modo, a TRRS diz respeito à utilização de mais de uma representação do mesmo objeto, melhorando a assimilação do aprendiz. Para Duval (2013), a matemática necessita de um conjunto de representações semióticas para ser compreendida, já que não existem instrumentos que possam demonstrá-la ou medi-la. Em virtude do exposto, as duas teorias são importantes para um bom desempenho e progresso da proposta, sendo perceptível a ligação entre elas para o ensino dos números racionais, uma vez que ambas são de tratamento cognitivo.

Na Figura 4 a seguir pode-se perceber a relação entre as teorias:

Figura 4 - Relação TRRS e TAS



Fonte: Autora, 2024.

Na TRRS, Duval (2013) relata as duas faces da aprendizagem matemática, a exposta, na qual o que é aprendido se dá como “pré-requisito” para o ano seguinte, dando a importância apenas ao objeto matemático para finalização do período escolar, e a face oculta, na qual as atividades englobam os gestos intelectuais e se faz a utilização dos erros e obstáculos para uma boa aprendizagem. É nesta segunda face, pouco nítida, que a TRRS está apoiada. Desse modo, o sujeito pode transitar entre as representações sem dificuldades, já que, a partir das várias formas de representar o registro, consegue assimilar o conteúdo e enriquecer o seu aprendizado.

A face exposta é, de certo modo, a aprendizagem mecânica comentada por Ausubel (2003), em que o aprendiz não aprende de fato, mas apenas faz um processo de memorização para realizar a prova e passar de ano. Posteriormente, há um esquecimento total desse aprendizado, visto que foi algo que não fez sentido para o aprendiz.

A face oculta, que trata da aprendizagem formada e compreendida pelo aprendiz, relaciona-se com a aprendizagem significativa a partir de condições como a identificação dos subsunçores, a utilização de material potencialmente significativo e a disposição do aluno em aprender. A aprendizagem é significativa quando o aluno realmente aprende, ancorando o que já conhece com as novas ideias, o que lhe permite estar sempre em evolução cognitiva. Dentro das atividades preparadas no material potencialmente significativo, pode-se trabalhar os números racionais, trazendo suas várias representações para os alunos transitarem entre elas.

Um dos subsídios que pode ser utilizado para verificar se o aluno realmente aprendeu, segundo Ausubel (2003), é expor o aluno a situações diferentes das trabalhadas em sala de aula, em outras palavras, em outras formas de representação. Duval (2013) também defende que, para a aprendizagem, é necessário um tempo maior de aplicação dos conhecimentos em diferentes representações e também do domínio dos gestos intelectuais e transições, sendo notório construir com os sujeitos uma aprendizagem significativa.

É ponderoso relacionar ambas as teorias, em virtude da concordância dos autores e pelo fato de que, trabalhando com várias representações do mesmo objeto, torna-se mais fácil para o aprendiz compreender e assimilar o conteúdo trabalhado significativamente. Para tal, salienta-se a necessidade de trabalhar as representações semióticas referentes a TRRS dentro dos processos cognitivos da TAS. Perante o apresentado nesta seção, alinha-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica com a Teoria da Aprendizagem Significativa, surgindo, a partir dessa convergência, a sequência didática.

3.2 Contextualização da Implementação

A proposta foi desenvolvida de forma que valorize a participação ativa dos alunos, abrangendo a elaboração e utilização de materiais para manipulação durante as aulas e facilitando a visualização do conteúdo. Isso porque, como mencionado, a matemática não dispõe de elementos que possam ser utilizados para verificá-la, necessitando de materiais ou métodos que proporcionem aos aprendizes elucidar o que estão estudando.

Ressalta-se que os conteúdos referentes aos números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental não englobam o conjunto numérico por completo; trabalham-se apenas os racionais positivos, em suas representações fracionárias, decimais e percentuais. A proposta pode ser dividida em cinco etapas: a primeira diz respeito à compreensão da fração como parte/todo, incluindo a conceitualização, os tipos de frações, as comparações, a localização na reta numérica e as quatro operações matemáticas (adição, subtração, multiplicação e divisão); a segunda etapa visa à relação entre as frações e a porcentagem, aplicando as transformações pertinentes; a terceira etapa compreende a introdução dos números decimais e a concentração nas transformações envolvendo a fração e o decimal; na quarta etapa, serão realizadas atividades de transição, envolvendo as três escritas numéricas e os desenhos correspondentes; a etapa subsequente será destinada à avaliação de indícios da aprendizagem significativa.

Cabe registrar que a primeira etapa precisou de um tempo maior que as demais para aplicação, tendo em vista que a necessidade de compreensão completa das frações e suas operações para após serem feitas as transições pertinentes às demais representações. Em relação à terceira etapa, quando trabalhados os números decimais, não foram evidenciadas as dízimas periódicas e nem as quatro operações matemáticas, visto que a proposta tem como objetivo fazer com que o aprendiz compreenda as transições entre as representações fracionárias, decimais, percentuais e desenho geométrico.

No decorrer dos encontros, priorizou-se a construção dos conceitos de forma intuitiva, considerando as ancoragens com encontros anteriores e questionamentos abordados pela professora pesquisadora. Os encontros aconteceram de forma hierárquica, favorecendo a aprendizagem significativa dos aprendizes.

A seguir será descrito o local escolhido para a aplicação da proposta, bem como os sujeitos participantes da pesquisa.

3.2.1 O local da aplicação

A aplicação da sequência didática ocorreu no município de Passo Fundo, interior do estado do Rio Grande do Sul. Distante 293 km da capital Porto Alegre, Passo Fundo possui aproximadamente 206.103 habitantes em seus 784,407 km², abrangendo uma variedade econômica muito grande, além se ser referência em saúde e educação, fazendo com que as cidades vizinhas se desloquem à procura desses serviços.

O sistema educacional no município compreende 167 escolas: 37 escolas estaduais, 72 escolas municipais e 58 escolas particulares (79 escolas com Ensino Fundamental e 26 escolas com Ensino Médio), totalizando cerca de 40 mil estudantes. Segundo os dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), em torno de 98,90% dessas escolas estão localizadas na área urbana e as demais na área rural. As escolas da rede estadual fazem parte da 7ª Coordenadoria Regional de Educação (CRE), cuja sede se localiza em Passo Fundo e incorpora mais 31 municípios vizinhos, conforme consulta ao site da Secretaria da Educação/RS (SEDUC).

A escola escolhida para aplicação da proposta denomina-se Escola Estadual de Ensino Fundamental Gomercindo dos Reis, situada na Rua João Vergueiro, n° 116, na Vila Carmem. Criada oficialmente em 27 de fevereiro de 1962, abrangia da primeira até a quarta série do Ensino Fundamental. A fundação concebeu-se a partir do Grupo Escolar Municipal Antônio Reis, decorrente do empenho da direção e dos professores no projeto integrador de transformar o grupo escolar em uma escola estadual. Tempestades de inverno já ocasionaram o funcionamento da escola em outro endereço e em um local mais precário, todavia, com muita dedicação, na qualidade dos serviços prestados e na responsabilidade perante a comunidade, conseguiu se reerguer e voltar à normalidade em seu endereço de origem.

A escola, com 60 anos de fundação, conta, atualmente, com um total de 310 alunos distribuídos em turmas de 1º a 9º ano do Ensino Fundamental. Os alunos são oriundos, além da Vila Carmem, de bairros vizinhos, sendo que cerca de 83% não utilizam nenhum tipo de transporte para ir até a escola. Seu corpo docente é bem estruturado, totalizando, entre os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, 24 professores. Também fazem parte do núcleo escolar, a direção, composta pela diretora e dois vice-diretores, um responsável pelas turmas do turno da manhã e um pelas turmas da tarde, e duas pessoas na coordenação, além dos demais funcionários dos outros setores, como a secretaria, a cozinha e a limpeza.

Um único prédio de três pavimentos compõe a estrutura física da escola. No primeiro pavimento, constam as salas administrativas, a cozinha, o refeitório, os banheiros e duas salas de aula. O segundo e o terceiro pavimento são compostos por oito salas de aula, a biblioteca, a sala dos professores, os banheiros, a sala de informática, a sala de vídeo, a sala de leitura e um museu com a história do patrono, o Sr. Gomercindo dos Reis. Ao lado da escola, existem duas quadras, uma coberta e uma sem cobertura, menores que as medidas oficiais, mas que servem para os alunos praticarem esportes e demais atividades.

Conforme o Projeto Político Pedagógico (PPP) em vigência, esta é a missão da escola: “Nossa escola tem por missão assegurar um ensino de qualidade, garantindo o acesso e a permanência dos alunos, formando cidadãos críticos capazes de agir na transformação da sociedade”. Consta, ainda, duas visões, a estratégica e a de futuro. A estratégica possui os seguintes valores: 1) Responsabilidade: trabalhamos com elevado senso de compromisso, seriedade e respeito em todas as ações. 2) Excelência: buscamos a qualidade em tudo que fazemos. 3) Respeito: respeitamos os direitos de cada um e tratamos com equidade nossos alunos. 4) Solidariedade: valorizamos as atitudes positivas. 5) Ética: ter uma escola íntegra, honesta, transparente e justa, valorizando sempre o respeito pelo outro, a verdade, o diálogo e a parceria.

A visão de futuro relata a importância da responsabilidade: “Nossa escola será reconhecida pela responsabilidade, qualidade em nossas práticas educativas e pelo compromisso de formar cidadãos críticos, éticos, cientes de suas responsabilidades no contexto social”.

3.2.2 Os participantes da sequência didática e sujeitos da pesquisa

A escolha da turma para a aplicação da sequência didática deu-se pelo fato de que a professora pesquisadora é a titular, podendo, portanto, analisar e refletir sobre a própria prática docente. A turma escolhida de sexto ano constitui-se de vinte e um alunos com faixa etária entre 11 a 12 anos, dos quais dez são meninas e onze são meninos.

A localização da residência desses vinte e um alunos é bem dividida; cerca de doze moram próximos à escola, e os outros nove residem um pouco mais longe, inclusive em outros bairros. Em relação à estrutura familiar, alguns moram com os avós e outros com os pais, sendo que a renda familiar é obtida através de várias profissões, como área da confeitaria e/ou cozinha, apóstolos e pastoras, operadores de máquinas, mecânicos, assistentes técnicos, costureiras, faxineiras, artesãs, manicures, vigilantes, motoristas de aplicativo, caminhoneiros, pedreiros, além de várias mães serem do lar.

A turma é considerada participativa, engajada e, diante dessa constatação, acredita-se que se comprometerá com as atividades propostas, o que é de suma importância para a aprendizagem e validação da pesquisa. A escola autorizou a aplicação da sequência didática conforme os termos do documento apresentado no Apêndice A, e os responsáveis pelos estudantes autorizaram por meio da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), conforme Anexo A.

Os encontros foram distribuídos em cinco períodos semanais no turno da tarde.

3.3 Os encontros

Em seguida, serão descritos os encontros realizados na aplicação da sequência didática, que é objeto de estudo da presente proposta, contendo o detalhamento das aulas e os registros de algumas atividades.

3.3.1 Primeiro encontro: apresentação da proposta e identificação dos subsunçores

O primeiro encontro iniciou com a apresentação da proposta e das atividades que seriam desenvolvidas no decorrer das próximas aulas aos estudantes, salientando a sua intencionalidade: aprender significativamente o conjunto dos números racionais, o qual possui mais de um tipo de representação, podendo transitar entre elas. A partir dessa fala, a professora pesquisadora fez uma breve comparação desse grupo de números e o conjunto dos números naturais, que estava sendo explorado até o momento, ressaltando que os números naturais possuem uma única representação, e os números racionais apresentam três formas de representar a mesma quantidade.

Também foi mencionado que os participantes fariam alguns materiais manipulativos durante as aulas, devendo, portanto, terem sempre junto ao material diário para possível utilização: régua, tesoura, cola e lápis de cor. Em seguida, discutiu-se sobre o tempo da aplicação da sequência didática para ficar clara a forma de avaliação, a qual ocorreu constantemente ao longo das aulas mediante questionários e atividades.

Na sequência, deu-se início à aplicação da sequência didática. Cada aluno recebeu um questionário sobre frações (Apêndice B), para ser possível a identificação dos conhecimentos prévios. A etapa de identificação dos subsunçores foi primordial, tendo em vista que é a partir do que já existe na estrutura cognitiva do aprendiz que podem ser feitos processos de ancoragem com informações novas.

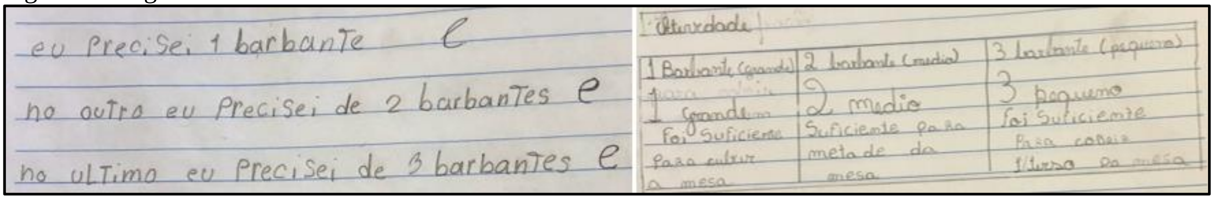
3.3.2 Segundo encontro: início da proposta

O segundo encontro iniciou com uma conversa sobre o questionário realizado na aula anterior, utilizado para identificar os subsunçores sobre frações. Em forma de diálogo, os alunos foram questionados sobre o que era uma fração. Inicialmente, os estudantes estavam com receio de errar, pois sabiam o que era a representação fracionária, mas não o que ela significava. Assim, foi feito um desenho no quadro que representava a fração $\frac{1}{2}$ para solicitar aos discentes qual fração aquele desenho geométrico representava. A turma respondeu que o desenho era “dois de um”, “duas partes e uma pintada” e “um por dois”.

Após esse breve diálogo, os estudantes foram direcionados para realizar a primeira atividade, quando cada um recebeu três pedaços de barbantes de diferentes tamanhos – 60, 30 e 20 centímetros –, sem que eles tivessem essa informação. Inicialmente, foram instruídos a fazer a medição da mesa com cada um desses pedaços, cada vez utilizando um barbante diferente, anotando no caderno quantas vezes ou quantos barbantes teriam que utilizar para encontrar a medida da mesa. No primeiro momento, tiveram muitas dúvidas sobre como fazer isso, já que os dois pedaços menores de barbante eram inferiores ao tamanho da mesa. Assim, foi esclarecido que poderiam replicar essa medida, ou seja, utilizar aquele pedaço mais de uma vez para poder realizar a tarefa. Nesse momento, dois alunos tentaram fazer o uso da régua para medir os barbantes, porém, foram avisados de que não podiam medi-los, uma vez que era indiferente quantos centímetros tinha cada barbante, mas, sim, quantas vezes eles utilizariam cada pedaço. Ressaltou-se que poderiam replicar o tamanho do barbante e, a partir disso, finalizaram os seus registros.

Quando foram orientados para escrever a quantidade na forma numérica, um grupo de alunos não compreendeu o que era isso; então, foi frisado com eles que escrever na forma numérica significa utilizar um número para representar essa quantidade. Após todos os alunos finalizarem as suas anotações, solicitou-se a eles quantos barbantes do tamanho maior eram necessários para medir a mesa, quantos barbantes médios e quantos barbantes pequenos, e eles responderam, de forma rápida: um, dois e três, respectivamente. A Figura 5 apresenta tais registros.

Figura 5 - Registros atividade com barbantes



Fonte: Acervo da autora, 2023.

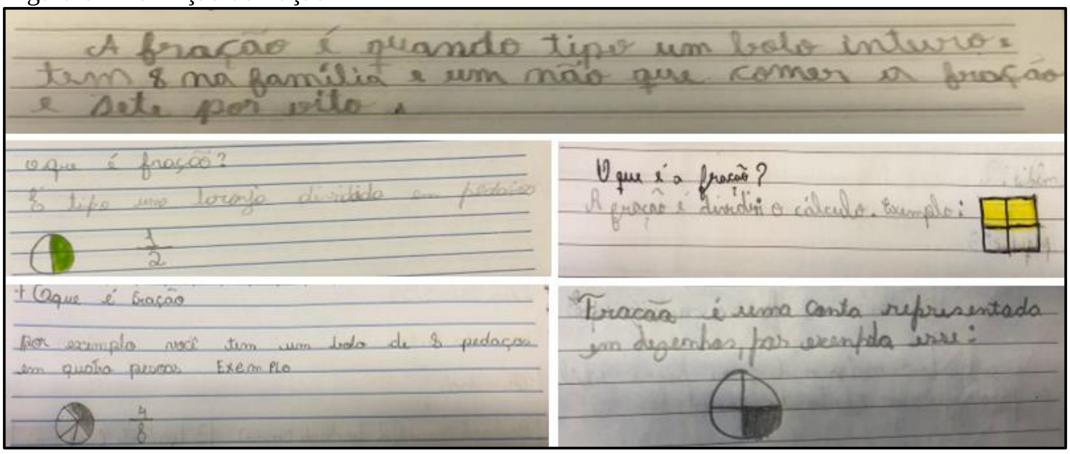
Nesse momento, os alunos foram orientados a esticarem os três barbantes sobre a mesa para que fosse possível observá-los a partir da seguinte questão que foi escrita no quadro: “se o barbante maior é uma unidade de medida, isto é, a unidade de referência, como podemos representar os dois barbantes menores utilizando a forma numérica?”

Os estudantes perguntaram-se como poderiam responder à pergunta sem saber o tamanho real de cada pedaço de barbante; então, foram informados de que o tamanho não importava e que deveriam pensar na elucidação do questionamento. Se o barbante maior possuía uma unidade de medida, logo, os dois barbantes menores eram inferiores a um.

Após pensarem um pouco, anotaram as suas conclusões no caderno e alguns alunos comentaram as suas respostas. Posteriormente a um breve diálogo, contextualizou-se como as frações surgiram, pois eles já haviam visto essa representação em anos anteriores. Assim, concluiu-se juntamente com a turma que esse tipo de representação fracionária deu-se a partir da necessidade humana de subdividir uma unidade já existente, que era exatamente o que estávamos fazendo com o barbante maior em relação aos menores, visto que precisávamos de dois médios ou três pequenos para igualar a mesma medida do barbante maior. Dessa forma, a partir da subdivisão da unidade, surgiu um novo número, o número fracionário, que pertence ao conjunto dos números racionais, utilizados para representar quantidades inteiras e não inteiras.

Seguindo essa fala, os alunos receberam uma folha contendo a contextualização histórica (Apêndice C), que foi lida e relacionada a conteúdos já trabalhados, como a representação numérica egípcia. Concluída a leitura e sem dúvidas até aquele momento, os alunos colaram a folha no caderno e anotaram o que eles pensavam que era uma fração. A Figura 6 apresenta algumas definições.

Figura 6 - Definição de fração



Fonte: Acervo da autora, 2023.

Para finalizar o encontro, os alunos receberam outra folha, conforme apresenta o Quadro 3, para que escrevessem onde já viram essas representações numéricas (frações, decimais, porcentagem e número natural).

Quadro 3 - Representação dos números racionais

Você já viu números escritos nas formas a seguir?
Anote, em cada coluna, onde você viu cada uma dessas representações.

$\frac{4}{12}$ $\quad 2\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}$	**0,6 4,5 21,8**	**100% 0,4%**	**2 5 10 100**
Fração	Decimal	Porcentagem	Número natural

Fonte: Autora, 2022.

Nessa etapa, todos os estudantes tiveram espaço para expor as anotações feitas, formando um ambiente de reflexão sobre o que estava sendo estudado, considerando suas experiências como cidadãos a partir da percepção de elementos que visualizam em seu cotidiano. Durante as falas dos alunos, surgiram anotações bem interessantes, como bateria do celular, micro-ondas, mercado, escola, computador, prova, jogos, lojas e internet. Assim, partindo de questionamentos, a professora pesquisadora conversou com os alunos sobre o tanque de gasolina de um carro e o copo de medidas para fazer uma receita, que também são alguns exemplos. Todos os alunos ampliaram os seus olhares sobre essas representações e registraram uma anotação mais completa no caderno.

Por fim, foi comentado com os alunos sobre os vários exemplos que podemos visualizar no nosso dia a dia que possuem essas representações, em virtude de que, em poucos minutos, foram mencionados vários exemplos, o que torna a compreensão dessas representações muito importante.

3.3.3 Terceiro encontro: dinâmica 1 – Bolinho de argila parte I

Evidencia-se que as dinâmicas 1 e 2 possuíam o objetivo de trabalhar a definição e o significado de fração como parte de um todo, sendo que as atividades envolveram, de forma intuitiva, significado, comparação e equivalência. O terceiro encontro iniciou-se com a aplicação da dinâmica do bolinho de argila, o que causou certa euforia nos alunos, pois eles estavam ansiosos para manipular o material. Logo após uma conversa sobre como seria a atividade, os alunos foram separados em duplas e trios para facilitar o desenvolvimento da dinâmica.

Para começar, em duplas, os participantes receberam um pedaço de papel pardo para manipular o material sem sujar a mesa. Em seguida, receberam um pedaço de argila com a orientação de fazer um bolinho redondo ou quadrado e um pedaço de fio de nylon para cortar os bolinhos quando solicitado. Na Figura 7 a seguir, visualizam-se alguns bolinhos feitos pelos alunos.

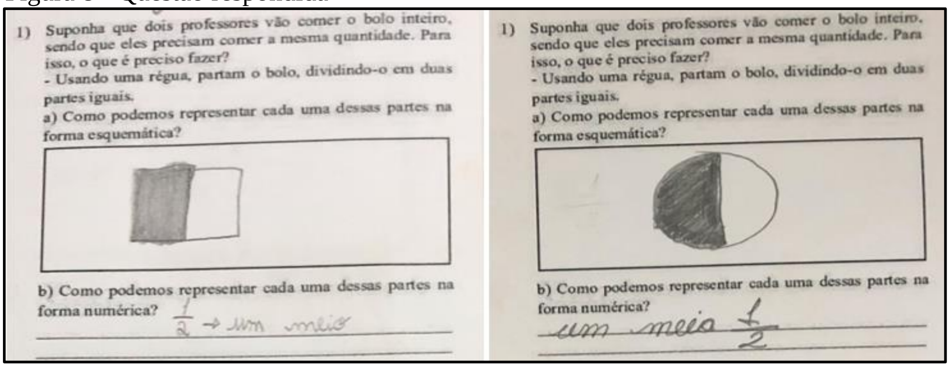
Figura 7 - Bolinhos de argila

Fonte: Acervo da autora, 2023.

Em função desse encontro ter apenas um período, o questionário referente à dinâmica foi separado em duas partes; os alunos receberam as questões conforme o Apêndice D, mas, nessa aula, responderam apenas as perguntas de 1 a 5.

Esse questionamento também foi respondido no quadro por meio da linguagem natural, na forma numérica e em esquemas de figuras geométricas. Exemplificando, a Figura 8 abaixo mostra como a questão número um ficou representada no quadro e no caderno dos alunos. Ressaltou-se com a turma que se o bolo de argila foi feito no formato redondo, teriam que representar o desenho na forma circular; se tivessem feito o bolo de formato quadrado, teriam que desenhar na forma de um quadrado, assim, os desenhos geométricos aproximariam mais do que eles fizeram.

Figura 8 - Questão respondida


1) Suponha que dois professores vão comer o bolo inteiro, sendo que eles precisam comer a mesma quantidade. Para isso, o que é preciso fazer?
- Usando uma régua, partam o bolo, dividindo-o em duas partes iguais.
a) Como podemos representar cada uma dessas partes na forma esquemática?
b) Como podemos representar cada uma dessas partes na forma numérica? $\frac{1}{2}$ → um meio

1) Suponha que dois professores vão comer o bolo inteiro, sendo que eles precisam comer a mesma quantidade. Para isso, o que é preciso fazer?
- Usando uma régua, partam o bolo, dividindo-o em duas partes iguais.
a) Como podemos representar cada uma dessas partes na forma esquemática?
b) Como podemos representar cada uma dessas partes na forma numérica? um meio $\frac{1}{2}$

Fonte: Acervo da autora, 2023.

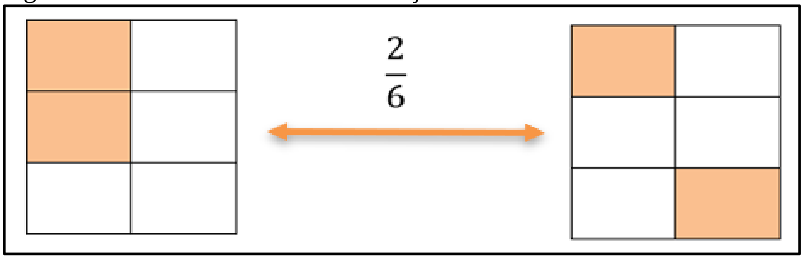
Concluindo esse encontro, os bolinhos foram identificados e guardados no armário para que a atividade pudesse ser finalizada na próxima aula. Os alunos nunca tinham visto argila até esse momento e poder trabalhar com esse material em aula fez com que eles ficassem bem ativos e participativos.

3.3.4 Quarto encontro: dinâmica 1 – Bolinho de argila parte II

No quarto encontro, foi dado continuidade às questões 6 a 9 referentes à dinâmica do bolinho de argila. Os participantes entraram na sala demonstrando intenso interesse, pelo fato de adorarem a atividade. Como os bolinhos ficaram no armário sem uma proteção adequada, alguns deles secaram e não tinham a possibilidade de manipulação; portanto, alguns alunos receberam um pedaço extra do material para refazer o bolinho e prosseguir com a atividade.

Logo após, os participantes continuaram a responder as questões faltantes do encontro anterior e, do mesmo modo, as perguntas foram respondidas no quadro e no caderno dos alunos. Nesse momento da atividade, os alunos já tinham visto como os questionários funcionavam e, quando a professora fazia uma pergunta, toda a turma respondia, por exemplo, as partes em que o bolo ficou dividido após uma etapa feita ou como poderíamos fazer essa representação na forma de desenho geométrico. Eles estavam bem ativos no processo de aprendizagem. Conforme a construção dos desenhos geométricos, a turma também foi questionada se era possível pintar partes diferentes e não necessariamente em ordem. Alguns alunos falaram que sim, pois independentemente da parte que fosse pintada estaria certo, devido ao inteiro estar dividido em partes iguais. A Figura 9 a seguir ilustra a exemplificação do caso.

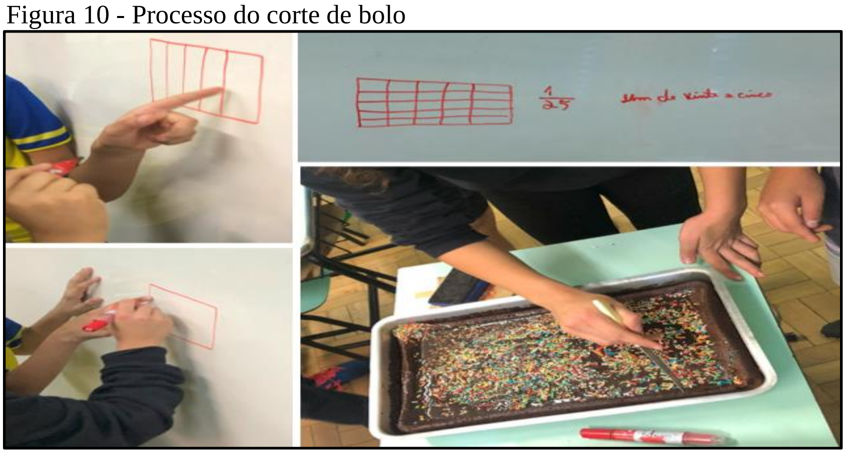
Figura 9 - Partes consideradas em relação ao todo



Fonte: Acervo da autora, 2023.

Findando a dinâmica e o encontro, todos os alunos colaram as folhas no caderno e ficaram contentes em poder levar seus bolinhos para casa. Posteriormente, a professora pesquisadora pegou o bolo de chocolate em formato retangular que havia levado para confraternização. A partir do bolo, questionou os alunos como eles fariam para que cada pessoa na sala comesse exatamente a mesma quantidade. Três alunos voluntários ficaram na frente do quadro para desenhar de que forma o bolo deveria ser cortado, bem como escreveram essa quantidade na forma numérica. Em seguida, o bolo foi cortado igual ao desenho realizado pelos alunos e cada um comeu uma parte. A Figura 10 a seguir mostra o processo que os alunos desenvolveram.

Figura 10 - Processo do corte de bolo



Fonte: Acervo da autora, 2023.

Após os participantes comerem, realizaram o relato de cinco minutos sobre como tinha sido a experiência. Nessa dinâmica, foram ressaltadas as diversas formas de representar uma quantidade. A representação semiótica facilita a construção cognitiva do aluno a partir de mais de um tipo de representação do mesmo objeto, tornando a aprendizagem significativa. Escrever em formas diferentes foi importante para os alunos assimilarem mais facilmente o conteúdo trabalhado. Desse modo, se fizeram presentes três tipos diferentes de representação semiótica: os registros multifuncionais de representação discursiva, a partir das argumentações na língua natural; os registros da representação não discursiva, a partir das figuras e dos desenhos geométricos; os registros monofuncionais de representação discursiva, a partir dos sistemas de escrita numérica e seus respectivos cálculos.

A participação dos alunos foi bem intensa com essa atividade, pois, além de poderem brincar com a argila, estavam aprendendo. Todos tiveram espaço de fala para dialogar e mostrar seus bolinhos. Os alunos estavam ativos em todo o processo e, por isso, motivaram-se mais a aprender, saindo da sala elogiando a tarefa feita e comentando pelo corredor. Ressalta-se que, além da aprendizagem envolvendo o conteúdo, a turma conheceu a argila, que, até então, era um material desconhecido.

3.3.5 Quinto encontro: dinâmica 2 – Folha de papel sulfite parte I

Num primeiro momento, a professora pesquisadora explicou aos participantes o motivo da necessidade de possuir uma unidade de referência ao trabalhar com frações, questionando-os se metade de uma laranja e metade de uma torcida em um estádio de futebol equivaliam à mesma quantidade. Conforme o esperado, a turma concordou que não era a mesma coisa; assim, enfatizou-se que é preciso ter uma referência para uma quantidade e que, na dinâmica proposta para a presente aula, a unidade de referência era uma folha de papel sulfite inteira.

Em seguida, a professora iniciou a dinâmica distribuindo cinco folhas de papel sulfite para cada um dos alunos, orientando-os conforme mostra o Quadro 4 na sequência.

Quadro 4 - Orientações da dinâmica 2: folha de papel sulfite

Primeiro passo
Cada aluno deve receber 5 folhas de papel sulfite.

Segundo passo
Uma folha de papel é a folha de referência. Escrever o número 1 no centro. Para os procedimentos a seguir, a unidade de referência será essa folha inteira.

Terceiro passo
Pegar outra folha, no sentido horizontal, e dobrar em duas partes iguais (de um lado para o outro).
- Cortar a folha na dobra, cuidando para que ambas tenham o mesmo tamanho.
- Registrar, em cada uma das partes obtidas, a fração que cada parte da folha representa.

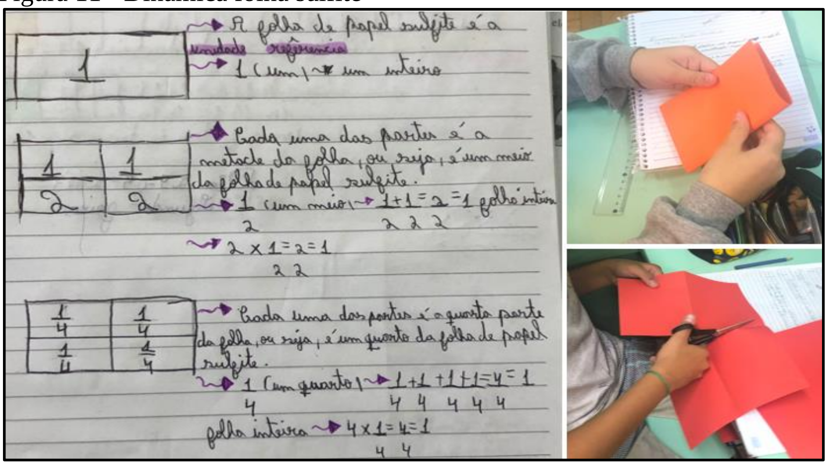
Quarto passo
Pegar a terceira folha e dividi-la em 4 partes iguais: Repetir o passo anterior e dobrar novamente no sentido do comprimento – (metade da metade) para obter a quarta parte.
- Cortar a folha na dobra, cuidando para que ambas tenham o mesmo tamanho.
- Registrar, em cada uma das partes obtidas, a fração que cada parte da folha representa.

Quinto passo
Pegar a quarta folha e dividi-la em 8 partes iguais. Semelhante à etapa anterior, mas dobrar uma vez a mais, ficando com 8 partes iguais.
- Cortar a folha na dobra, cuidando para que ambas tenham o mesmo tamanho.
- Registrar, em cada uma das partes obtidas, a fração que cada parte da folha representa.

Fonte: Autora, 2022.

Nessa etapa foram levadas em consideração as diferentes formas de representação semiótica. Conforme os alunos foram realizando a tarefa, a professora explicou cada etapa e colocou no quadro os recortes, escrevendo as conclusões. Os alunos, além do material, escreveram no caderno as conclusões, bem como desenharam cada etapa realizada. A Figura 11 a seguir mostra algumas etapas realizadas pelos estudantes e como ficaram os registros no quadro e nos cadernos.

Figura 11 - Dinâmica folha sulfite



Fonte: Acervo da autora, 2023.

Os alunos compreenderam facilmente o que era necessário fazer nessa dinâmica, ocasionando uma participação ativa no processo de aprendizagem, sempre respondendo às questões e ajudando nas conclusões necessárias. Alguns alunos falavam as respostas antes mesmo das perguntas serem feitas.

Com os recortes finalizados e as anotações feitas, os discentes tinham uma tarefa para realizar em casa com uma das folhas de papel sulfite: deveriam realizar o passo seguinte a essa sequência e fazer as devidas anotações. Assim, foram orientados a guardar esse material que seria utilizado na próxima aula.

3.3.6 Sexto encontro: dinâmica 2 – Folha de papel sulfite parte II

O sexto encontro iniciou com a exposição dos alunos sobre a tarefa que eles levaram para casa. A maioria dos aprendizes conseguiu realizar a etapa seguinte que resultava em 16 partes. Em seguida, foram separados em duplas/trios e fizeram algumas atividades (Apêndice E) que serviram para identificar a compreensão de fração como parte de um todo, bem como a comparação dos tamanhos dos recortes envolvidos, verificando, assim, se haviam sido estabelecidas ligações entre o que os aprendizes já possuíam em sua estrutura cognitiva e as novas informações aprendidas. Essa identificação da fração como parte de um todo foi relevante para que nos próximos encontros novas ancoragens fossem construídas; portanto, os últimos dois exercícios foram respondidos pelos alunos em casa para entregar na próxima aula.

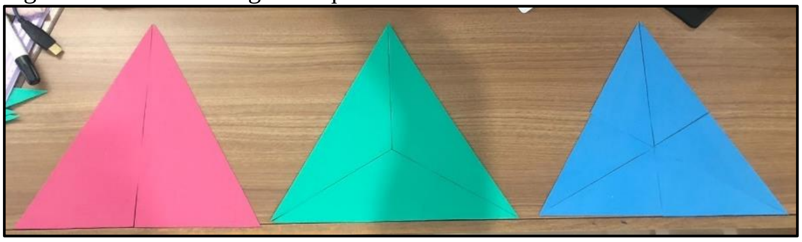
3.3.7 Sétimo encontro: dinâmica 2 – Folha de papel sulfite parte III

O sétimo encontro teve como objetivo corrigir os exercícios propostos no encontro anterior. A professora, guiada pelos alunos, colocou todas as respostas no quadro, e as questões em que houve divergência foram revisadas com base no material novamente. Após conferência das questões, os estudantes entregaram as que estavam destacadas no Apêndice E. Em seguida, elas foram discutidas, e a turma explicou o que havia pensado para responder.

3.3.8 Oitavo encontro: dinâmica 3 – Composição e decomposição de triângulos parte I

Para esse encontro, a turma foi dividida em cinco grupos, sendo que cada um recebeu um jogo constituído por três triângulos equiláteros (de mesmo tamanho), confeccionados por E.V.A, os quais estavam recortados em partes iguais mas de maneiras diferentes. Conforme ilustrado na Figura 12, apresentada na sequência, para cada modelo de triângulo, utilizou-se uma cor diferente.

Figura 12 - Kit de triângulos equiláteros



Fonte: Acervo da autora, 2022.

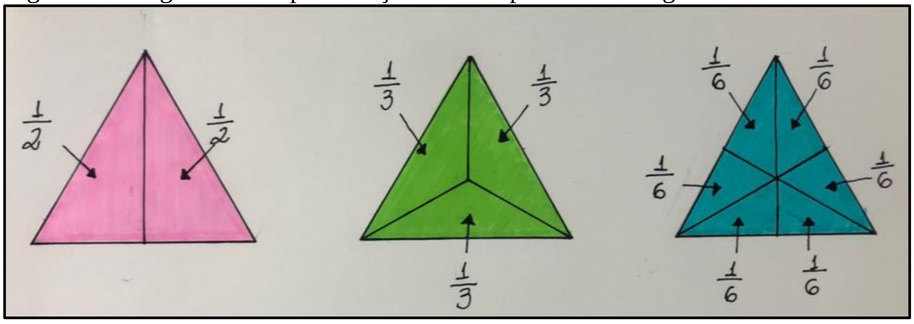
Inicialmente, a professora pesquisadora solicitou aos grupos que montassem os triângulos equiláteros, representados na Figura 13. Alguns grupos tiveram dificuldade em montar o triângulo de cor azul e, diante disso, receberam orientação de que poderiam sobrepor as peças, isto é, utilizar um triângulo que já estava montado como base e encaixar as peças de outra cor por cima.

Figura 13 - Montagem dos triângulos

Fonte: Acervo da autora, 2023.

Após a montagem, em seus cadernos, os alunos fizeram um desenho colorido tal qual a montagem dos triângulos. Além disso, por meio de uma fração, identificaram cada uma das peças que compunha o triângulo. Também foi necessário realizar esses registros em um relatório separado para ser entregue (um relatório por grupo). A Figura 14 ilustra como ficaram os registros nos cadernos dos alunos.

Figura 14 - Registros da representação de cada parte dos triângulos



Fonte: Acervo da autora, 2022.

Na sequência, a professora pediu para que os alunos pegassem peças de cores diferentes e montassem um triângulo equilátero para, em seguida, efetuarem o registro no caderno em desenho e escrita aditiva de frações. A Figura 15, na sequência, apresenta as montagens que os alunos fizeram e registraram.

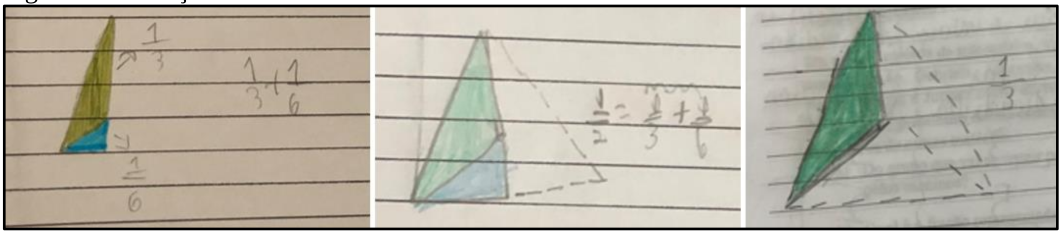
Figura 15 - Registros das montagens com mais de uma cor

Fonte: Acervo da autora, 2023.

A professora pesquisadora propiciou um diálogo apontando que as formas encontradas estavam corretas, pois todas representavam um triângulo equilátero inteiro, construído com peças diferentes. Para finalizar as atividades, os alunos foram desafiados a construir e apresentar para a turma duas etapas. Na primeira, utilizando as peças azuis e verdes, os grupos deveriam montar um triângulo que representasse a metade do triângulo equilátero; do modo como foi feito anteriormente, registraram no caderno o desenho e a escrita aditiva das frações que representava essa metade. Na segunda etapa, os grupos construíram um triângulo equivalente a um terço do triângulo equilátero, mas não foram ditas quais cores eles poderiam utilizar.

A Figura 16 apresenta algumas soluções que apareceram.

Figura 16 - Soluções dos desafios



Fonte: Acervo da autora, 2023.

Através de uma argumentação sobre a observação dos desafios, foi dialogado com a turma por que não poderiam ter sido utilizadas as peças rosas para a construção dessa última etapa. A partir das ancoragens com os subsunçores, os alunos compreenderam que as peças rosas equivaliam a mais que um terço do triângulo e, por isso, não poderiam ser usadas; as possibilidades eram utilizar duas peças azuis ou utilizar uma única peça rosa, conforme alguns grupos montaram.

A professora reforçou a ideia de que isso não se aplica apenas aos triângulos, mas que a tarefa poderia também ser realizada com outras figuras geométricas, como o quadrado ou o círculo, desde que a figura seja dividida em partes iguais.

Essa atividade teve a intencionalidade de trabalhar de forma intuitiva a equivalência de frações para contextualizar em encontros posteriores, partindo do macro para o micro, tornando esse vocabulário mais familiar aos alunos.

3.3.9 Nono encontro: dinâmica 3 – Composição e decomposição de triângulos parte II

O nono encontro foi destinado à conclusão dos relatórios referentes à composição e decomposição de triângulos pelos respectivos grupos. Na hora de escrever a adição das frações, alguns grupos se confundiram e colocaram, por exemplo, a fração $\frac{1}{4}$ quando utilizaram 4 peças para formar o triângulo inteiro. Assim, os kits de triângulos foram distribuídos novamente e foi mostrado, utilizando as peças, o que eles estavam registrando. A partir da orientação, conseguiram concluir os seus relatórios e entregar a atividade para que fosse possível avaliar a compreensão deles sobre a fração como parte de um todo e as representações semióticas envolvidas.

3.3.10 Décimo encontro: conceito, nomenclatura e leitura das frações

O foco do décimo encontro foi destinado à formalização das ideias preestabelecidas pelas atividades anteriores. A etapa de conceitualização foi de extrema importância para a diferenciação progressiva, para que o aprendiz compreendesse o que é uma fração e enriquecesse cada vez mais seu conhecimento, elevando os níveis dos seus conhecimentos prévios, podendo ancorar mais aprendizagens significativas. Potencializou-se a criação de relações a partir dos organizadores prévios comparativos, visto que eles auxiliaram na ligação dos conhecimentos prévios existentes aos novos, fortalecendo as informações na estrutura cognitiva do sujeito.

A professora questionou os alunos sobre o que era uma fração e anotou no quadro o que eles apontaram, por exemplo, "dividir coisas". A partir desse apontamento foi solicitado o que era essencial nessa divisão, então, um aluno disse que era preciso "dividir em partes iguais". Em concordância com essa descrição, esclareceu-se que a fração não é um bolo ou uma pizza, mas, sim, a representação de parte de alguma coisa, como um pedaço de um bolo inteiro ou uma fatia de pizza inteira, e que sempre está ligada ao inteiro, visto que representa parte de algo.

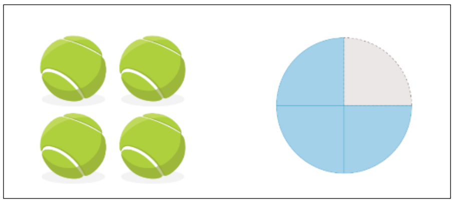
Após as colocações dos aprendizes, a fração foi conceitualizada no quadro e, com o exemplo da fração $\frac{1}{2}$, apresentou-se que o número 1, que está na parte superior da fração, chama-se numerador, e o número 2, que está na parte inferior da fração, chama-se denominador; o 2 indica a quantidade de partes em que o inteiro foi dividida, e o 1 a quantidade de partes consideradas. Também foi evidenciada a importância de cada uma dessas nomenclaturas, sendo essencial tratar a matemática com a linguagem correta. Nesse momento, a professora colocou no quadro algumas frações e solicitou aos alunos que lessem; a partir da leitura, esses nomes eram anotados ao lado da fração, assim como se informava em quantas partes o inteiro estava dividido e quantas partes estavam sendo consideradas.

A professora pesquisadora informou aos alunos que cada uma das nomenclaturas – numerador e denominador – possuem regras de leitura que devem ser seguidas. Na sequência, como consta no Quadro 5, entregou uma folha contendo as respectivas regras.

Quadro 5 - Leitura de frações

A primeira coisa que devemos considerar é que o denominador deve indicar em quantas partes a unidade será dividida. Vamos dar um nome a cada uma dessas partes. Se, por exemplo, a unidade é dividida em duas partes iguais, cada uma dessas partes será chamada de *meio*; se for dividido em três, *terços*; se em quatro, *quartos*, e assim por diante.

Partes que a unidade é dividida	Nome de cada uma das partes
2	*Meios*
3	*Terços*
4	*Quartos*
5	*Quintos*
6	*Sextos*
7	*Sétimos*
8	*Oitavos*
9	*Nonos*
10	*Décimos*
11	*Onze avos*
12	*Doze avos*
⋮	⋮



A tabela ao lado mostra os nomes que recebem as partes quando uma unidade é dividida. A partir do onze, acrescentamos a palavra avos depois do número: *onze avos*, *doze avos*, *treze avos*, e assim sucessivamente.

Dessa forma, **quando você ler uma fração, primeiro menciona o numerador, em seguida a quantidade de partes de onde estamos pegando**. Por exemplo, a fração que lemos como *sete nonos*, significa que pegamos sete partes depois de dividir a unidade em nove.

É importante reconhecer que quando dizemos as frações, estamos fazendo a mesma coisa que contar qualquer outro tipo de objetos.

Na imagem apresentada a seguir, quantas bolas existem? Qual expressão representa a fração do círculo em azul?

Quando identificamos que se trata do mesmo tipo de objetos, é mais fácil contar e responder que existem *quatro bolas*. No caso das frações, acontece a mesma coisa, basta notar que as partes são *quartos* e, depois disso, podemos contar e dizer facilmente que são três, *três quartos*.

Disponível em: https://edu.gcfglobal.org/pt/numeros-fracionarios/como-ler-as-fracoes/1/. Acesso em: 02 fev. 2023.

Fonte: Autora, 2023.

Na sequência, a professora solicitou que cada um colasse no caderno essa folha, fazendo a leitura junto com eles, verificando, posteriormente, se as leituras das frações feitas anteriormente estavam corretas ou não.

3.3.11 Décimo primeiro encontro: situações problemas com frações parte I

O propósito do décimo primeiro encontro foi demonstrar aos estudantes que as frações podem estar relacionadas a situações problemas, conforme demonstrado no Quadro 6, a fim de que pudessem compreender as frações como representações de quantidades diversas, e não simplesmente desenhos.

Quadro 6 - Situação-problema

<u>Situação-problema</u>

Em uma olimpíada de Matemática, inscreveram-se 250 alunos. O prêmio para os 50 melhores é uma excursão. Gabriela, Alexandre, Ricardo, Luciana, Maurício, Leonardo, Paulo, Renato, Pedro, Priscila e Jussara reuniram-se na casa de Gabriela para estudar. Gabriela possui muitos livros. Das 7 prateleiras de sua estante, 3 estão repletas de livros de matemática e as outras estão com livros de outras matérias.

a) Do grupo que vai se reunir para estudar na casa da Gabriela, qual é a fração representada pelos meninos?

b) Qual é a fração representada pelas meninas?

c) Do total de alunos que vão participar da olimpíada, que fração é representada pelos alunos que vão ganhar a excursão?

d) Qual é a fração representada pelos alunos que não vão ganhar a excursão?

e) Que fração é representada pelas prateleiras da estante de Gabriela que não estão com livros de matemática?

Fonte: Autora, 2022.

Os aprendizes acompanharam a leitura e conseguiram responder todas as questões a partir das orientações e dos questionamentos que foram feitos. Além disso, a professora pesquisadora explicou como calcular a quantidade de um número, exemplificando $\frac{2}{5}\ de\ 15$ e $\frac{4}{5}\ de\ 40$, resolvendo a partir do conceito de fração como parte de um todo.

Após a explicação e a resolução da situação-problema proposta, foi entregue uma folha com atividades referentes às etapas iniciais para que fossem resolvidas e coladas no caderno (Apêndice F), contendo também, neste apêndice, duas atividades para serem entregues.

Essa contextualização da fração, suas nomenclaturas e leituras, que se iniciaram no encontro anterior, fazem parte da representação semiótica no que tange aos registros multifuncionais de representação discursiva da língua natural, em que se fazem associações verbais e conceituais. É uma etapa importante para a diferenciação progressiva, a qual exige dos aprendizes a evolução e o enriquecimento dos conhecimentos prévios, tornando a aprendizagem significativa. Além disso, esse tipo de registro favorece a dedução a partir de definições, ou seja, apenas com a ligação existente dos subsunçores, dos organizadores prévios comparativos e dos tipos de representação semiótica elaborados, os estudantes serão capazes de realizar atividades de multiplicação de um número natural por uma fração sem terem visto as operações envolvendo fração.

3.3 12 Décimo segundo encontro: situações problemas com frações parte II

O décimo segundo encontro foi destinado à conclusão das atividades do Apêndice F. Em uma dessas atividades, foi necessário calcular $\frac{1}{4}\ de\ 20$. Pela multiplicação de frações, o algoritmo indica que se deve multiplicar o numerador pelo número natural e manter o denominador e, após, simplificar, se possível; logo, tem-se:

$$1\ x\ 20 = 20$$

$$\frac{20}{4} = \frac{10}{2} = 5$$

Embora os alunos ainda não tenham aprendido a operação de multiplicação de frações, eles já compreenderam bem a fração como parte de um todo, relacionando essa atividade com esses termos; 20 seria a parte inteira que foi dividida em 4 partes, sendo considerada apenas uma dessas partes, assim, 20 ÷ 4 = 5. Uma das partes equivale a 5, logo, $\frac{1}{4}\ de\ 20 = 5$. Esse procedimento mostrou se as dinâmicas realizadas até esse momento geraram indícios de uma aprendizagem significativa, visto que os estudantes aplicaram o conceito de fração em uma situação diferente das trabalhadas até então.

Após concluírem as atividades, elas foram corrigidas no quadro com o auxílio de desenhos, sanando todas as dúvidas, utilizando até mesmo os dedos das mãos dos alunos para representar as quantidades, ou as canetas para interpretar as quantidades dos exercícios.

A questão 9 do Apêndice envolvia a pintura em grades de acordo com a fração apresentada. No primeiro caso, deveriam ser pintados $\frac{1}{2}$ da grade. Um aluno relatou que, em casa, os pais ajudaram na tarefa, e ele pintou apenas um quadradinho, mas sabia que estava errado, pois deveria ser pintada a metade, ou seja, 50 quadradinhos, já que a grade estava dividida em 100 partes. Assim, todos os demais alunos foram relatando a quantidade de quadradinhos que havia e a quantidade de quadradinhos que deveria ser pintada para resolver a questão.

3.3.13 Décimo terceiro encontro: frações equivalentes – Escala Cuisenaire parte I

O décimo terceiro encontro teve como objetivo trabalhar frações equivalentes a partir do material Escala de Cuisenaire. Para iniciar, foi explanado para os alunos que essa escala é formada por peças em que cada cor possui um valor, como mostra a Figura 17, a seguir. Em duplas, os alunos receberam as peças coloridas sendo orientados a relacionarem as peças. De forma imediata, todas as duplas organizaram por tamanho e/ou cor.

Figura 17 - Escala Cuisenaire

Fonte: Acervo da autora, 2023.

Em seguida, os alunos receberam um questionário, conforme mostra, a seguir, o Quadro 7, para ser respondido utilizando o material.

Quadro 7 - Questionário Escala Cuisenaire

1. Pegue a barrinha laranja, a qual representa a unidade de referência, e responda: quantas barrinhas vermelhas são necessárias para formar uma barra de mesmo tamanho que a barra laranja?
2. Agora, quantas beges são necessárias para formar uma barra do mesmo tamanho que a barra laranja?
3. Quantas pecinhas verdes clara são necessárias para formar uma barra do mesmo tamanho que a barra azul?
4. Que parte da unidade de referência – nesse caso, a barra laranja – representa a barrinha amarela?
5. Que parte da unidade de referência – nesse caso, a barra laranja – representa a barrinha bege?
6. Que parte a barrinha verde representa em relação à barra verde escuro?
7. Quantas barras vermelhas são necessárias para termos a barra marrom?
8. Quantas barras beges precisamos para ter uma barra preta?
9. De que formas podemos montar a barra laranja?

Fonte: Autora, 2023.

Neste encontro, foram respondidas apenas as questões 1 e 2. Para efetuarem os desenhos, foi medida, com uma régua, a peça laranja, que possuía 10 centímetros, sendo enfatizado que as medidas das peças deveriam ser replicadas no caderno, bem como ser respeitadas as cores das peças utilizadas.

Os alunos divertiram-se com a tentativa de encontrar a resposta correta, fazendo com que houvesse uma grande participação no encontro. Vale salientar que, a cada questão, eles precisavam fazer os registros no caderno, tanto das barras coloridas, quanto da representação numérica e escrita formal.

3.3.14 Décimo quarto encontro: frações equivalentes – Escala Cuisenaire parte II

No décimo quarto encontro, foi dada continuidade ao questionário entregue na aula anterior; a turma também foi separada em duplas, que receberam as peças para concluírem suas anotações. Como já haviam compreendido o que deveria ser feito, foram deixando em cima da classe os materiais – régua, caderno e lápis de cor –, solicitando auxílio quando necessário.

As maiores dificuldades foram nas questões 4 e 5, que eram de interpretação. Por isso, a professora explicou a diferença de “quantos” – que se referia à quantidade de peças – e “que parte” – que se relacionava a uma parte, uma parcela, uma fração daquela unidade de referência. Passando pelos grupos, também foi reforçado o conceito de fração como parte de um todo, utilizando, por exemplo, uma peça laranja e dez peças beges, conforme demonstrado pela Figura 18 apresentada na sequência.

Figura 18 - Exemplos escala Cuisenaire

Fonte: Autora, 2023.

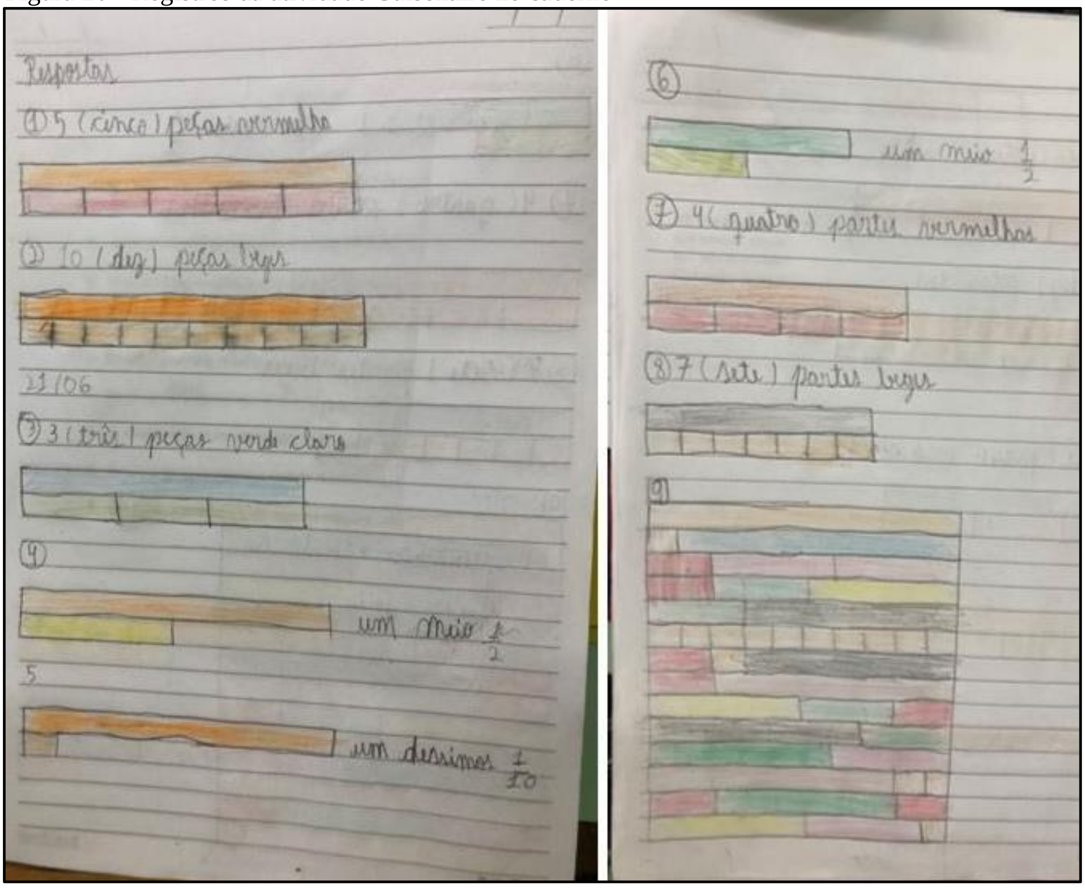
No primeiro exemplo, foi demonstrado que eram necessárias dez peças beges para encontrar o mesmo tamanho que a peça laranja, ou seja, cada uma das peças beges representava $\frac{1}{10}$ da peça laranja, já que tínhamos um total de dez peças. Nesse caso, como as dez peças estavam presentes, a fração que representava as peças beges em relação à laranja era $\frac{10}{10}$. No segundo exemplo, foram retiradas sete peças beges e perguntado aos alunos que fração as peças beges restantes representavam em relação à peça laranja; eles logo perceberam que era $\frac{3}{10}$, pois havia três peças beges das dez que formavam a laranja. Da mesma forma, no terceiro exemplo, concluiu-se que a peça bege representava $\frac{1}{10}$ da laranja.

Nas Figuras 19 e 20, a seguir, constam a participação dos alunos no decorrer da atividade e as anotações realizadas nos cadernos, utilizando a forma numérica e desenho correspondente.

Figura 19 - Realização da atividade escala Cuisenaire

Fonte: Acervo da autora, 2023.

Figura 20 - Registros da atividade Cuisenaire no caderno



Fonte: Acervo da autora, 2023.

Com esses exemplos, os grupos foram compreendendo mais a fração e fazendo a ligação com os encontros anteriores, percebendo o quão era simples de ser compreendida se fosse prestada atenção aos detalhes e, nesse caso, trabalhar com materiais concretos ajudou muito.

3.3.15 Décimo quinto encontro: frações equivalentes – Escala Cuisenaire parte III

Como forma de finalizar a atividade envolvendo a equivalência de frações a partir da escala Cuisenaire, foram realizados, no décimo quinto encontro, exercícios conforme o Quadro 8, utilizando a escala como referência. Houve necessidade de realizar no caderno a fração na escrita formal, na forma numérica e na forma de desenho das barras coloridas, sempre explorando o máximo de representações semióticas possíveis. Pelo fato de já estarem familiarizados com os procedimentos, começaram a responder as questões rapidamente, sanando as dúvidas no decorrer da aula.

Quadro 8 - Exercícios Escala Cuisenaire

1) Se a barra laranja representa a unidade de referência, qual a cor da barra que representa $\frac{1}{2}$?
2) Agora, se a barra lilás representa a unidade de referência, qual a cor da barra que representa $\frac{1}{2}$?
3) Se a barra lilás representa a unidade de referência, qual a cor da barra que representa $\frac{1}{4}$?
4) Se a barra marrom representa a unidade de referência, qual a cor da barra que representa $\frac{1}{2}$?
5) Mudando a unidade de referência para a barra verde-escura, qual a cor da barra que representa $\frac{1}{3}$?
6) Se a barra verde-escura representa a unidade de referência, qual a cor da barra que representa $\frac{1}{9}$?
7) Se a barra verde-escura representa a unidade de referência, qual a cor da barra que representa $\frac{2}{3}$ dela?
8) Se a barra laranja representa a unidade de referência, qual a cor da barra que representa $\frac{4}{5}$ dela?
9) Que fração representa a barra bege em relação a todas as outras barras?

Fonte: Autora, 2023.

A contextualização de fração equivalente foi bem compreensível aos alunos nesta fase, pois a atividade de cuisenaire foi o organizador prévio comparativo, uma vez que, no oitavo encontro e na atividade com a folha de papel sulfite, os alunos tiveram contato com esse termo e suas regras, tornando-se, neste encontro, algo familiar na sua estrutura cognitiva. A atividade de cuisenaire proporcionou a ligação desses conhecimentos trabalhados com os novos, construindo de forma facilitada a aprendizagem significativa.

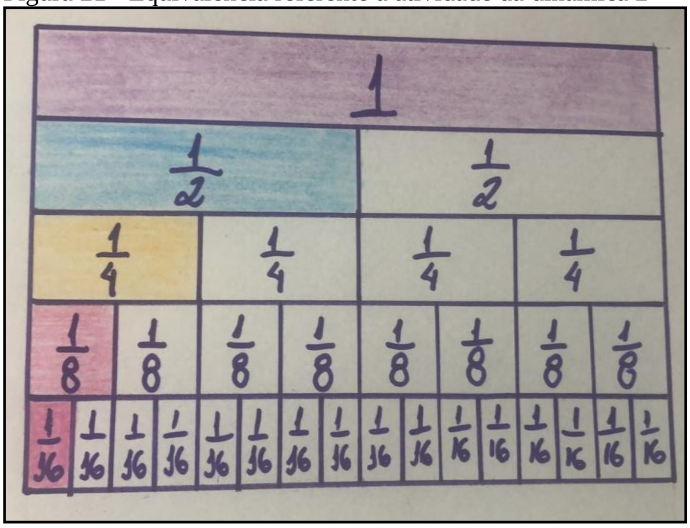
3.3.16 Décimo sexto encontro: tabela de frações equivalentes parte I

Iniciando o décimo sexto encontro, a professora perguntou aos alunos qual a relação que poderíamos estabelecer entre a peça amarela e cinco peças beges. Alguns alunos falaram que eram iguais, outros falaram que era um inteiro, com a intencionalidade de dizer que a peça amarela, nesse caso, era a unidade de referência e equivalia a cinco peças beges. A partir da representação discursiva do registo multifuncional em língua natural, foi contextualizado com os alunos, em forma verbal e escrita, que uma fração é equivalente à outra quando representam a mesma quantidade do todo.

Dando continuidade ao encontro anterior, foram feitas construções de tabelas de equivalência, tendo como referência a atividade da folha de papel sulfite feita no quinto encontro. Cada aluno recebeu uma folha de ofício branca na qual desenharam cinco retângulos contendo 16 centímetros de comprimento e 2 centímetros de largura, um abaixo do outro.

O primeiro retângulo correspondia à folha de sulfite inteira; logo, escreveram nesse retângulo o número 1 e coloriram. Para o segundo retângulo, questionou-se em quantas partes ficou dividida a folha quando foi efetuado o primeiro recorte, sendo orientados a fazerem a divisão do segundo retângulo em duas partes, escrevendo a fração que representa cada uma dessas partes e colorir apenas uma delas. E, assim, sucessivamente, até as duas próximas etapas. Para o último retângulo, os alunos foram questionados em relação a quantas partes obteriam se realizassem mais uma dobra na folha sulfite, recortando-a, preenchendo, assim, o último retângulo. A seguir, a Figura 21 apresenta como ficou o registro no caderno de cada aluno.

Figura 21 - Equivalência referente à atividade da dinâmica 2



Fonte: Acervo da autora, 2022.

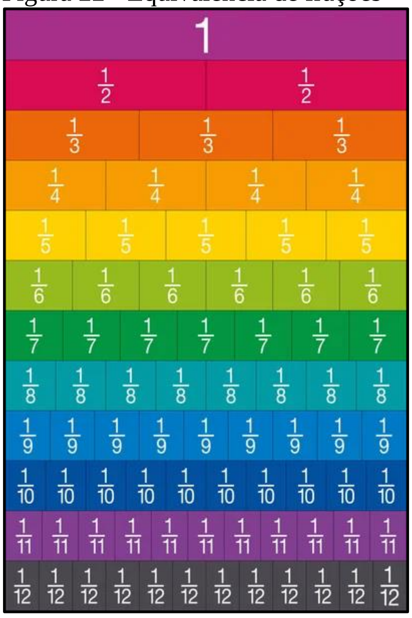
A imagem da equivalência foi colada no caderno; em seguida, realizou-se um diálogo com os alunos para que fossem anotadas as frações equivalentes dessa atividade.

- $1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{8}{8} = \frac{16}{16}$
- $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$
- $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}$
- $\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$

A partir da observação desses casos, os alunos foram questionados se havia alguma relação entre esses valores. Prontamente, um aluno disse que os números estavam sendo multiplicados por dois. Assim, foi concluído com eles que para encontrar uma fração equivalente a outra precisamos multiplicar ou dividir o numerador e o denominador por um mesmo número.

Na sequência, os alunos receberam uma imagem na qual se demonstra a equivalência de frações, de uma forma mais detalhada, para colar, com a tarefa de escrever, abaixo dela, quais as frações equivalentes eram perceptíveis. A imagem é a que se apresenta na Figura 22.

Figura 22 - Equivalência de frações



Fonte: Site Depositphotos (s.d).

Após os apontamentos da turma, seguiu-se com a atividade, e a professora colocou a sequência de equivalência construída no quadro novamente, mas agora da seguinte forma:

$\frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Foi perguntado aos alunos se eles notavam algum padrão nessa sequência de frações. Após a manifestação dos alunos, a professora explicou que nesse processo de frações equivalentes acontece o que se chama de simplificação. Nesse caso, em cada uma das etapas, o numerador e o denominador foram divididos por 2, e quando se obteve a fração $\frac{1}{2}$ não havia mais como simplificar; logo, trata-se de uma fração irredutível, isto é, a fração está na sua forma mais simplificada possível.

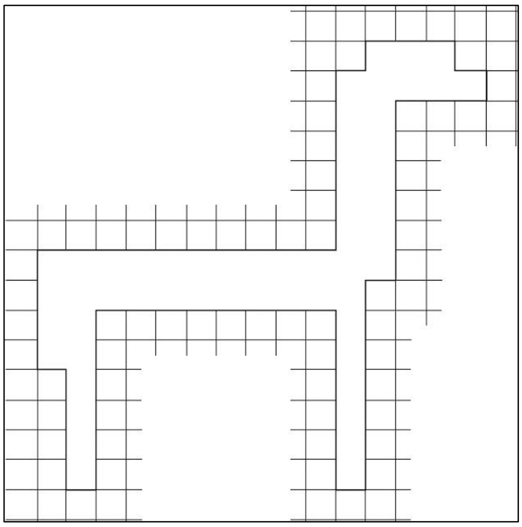
3.3.17 Décimo sétimo encontro: tabela de frações equivalentes parte II

No décimo sétimo encontro, retomou-se o conceito de fração equivalente, bem como de fração irredutível e simplificação, com alguns exemplos no quadro. Em seguida, os alunos foram orientados a realizar a atividade da girafa, conforme o Quadro 9 a seguir.

Quadro 9 - Atividade girafa

1) Siga a imagem ao lado e, com o material de Cuisenaire, desenhe essa figura sobre a classe. Após, faça esse desenho em seu caderno e pinte cada espaço com a cor equivalente à peça utilizada. (Lembre-se de usar os tamanhos corretos das peças.)

Por último, escreva no formato de adição de frações a quantidade equivalente às pinturas realizadas.

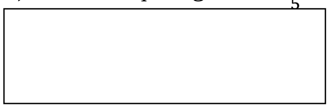


2) Um estudante disse que $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{6}$ são do mesmo tamanho porque ambas têm uma parte faltando. Você concorda? Explique utilizando figuras para esclarecer seu raciocínio.

Disponível em:

https://sites.google.com/site/janainapromatematica/escala-cuisenaire-i. Acesso em: 11 fev. 2023.

3) Cerca de quão grande é $\frac{4}{5}$ do retângulo abaixo? Mostre colorindo o retângulo.

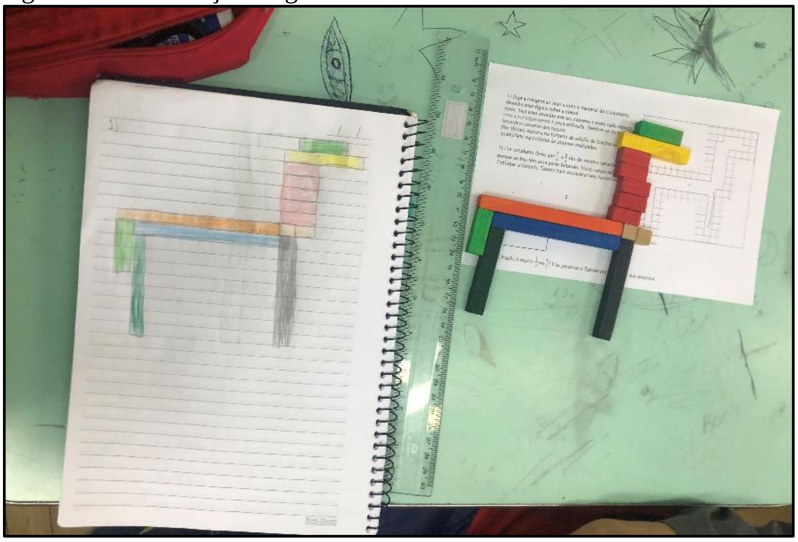


4) Qual fração é maior: $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{2}$? Use palavras e figuras para explicar sua resposta.

Fonte: Autora, 2023.

Alguns alunos se confundiram e acabaram fazendo o desenho com as peças ao redor da girafa, e não construindo a girafa em si. Após, foram orientados a fazer o desenho no caderno e colorir, escrevendo, ainda, a adição de frações das peças que foram utilizadas no processo. O desenho e a montagem podem ser observados conforme a Figura 23 a seguir.

Figura 23 - Construção da girafa



Fonte: Acervo da autora, 2023.

As atividades não concluídas durante a aula foram finalizadas em casa.

3.3.18 Décimo oitavo encontro: contextualização e exercícios sobre frações equivalentes parte I

No décimo oitavo encontro, realizou-se a correção da atividade da aula anterior, ressaltando o que pode ser feito para encontrar uma fração equivalente. A turma ficou dividida na última questão, que argumentava sobre qual fração era maior entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{2}$, sendo que alguns diziam ser igual, pois os números utilizados eram os mesmos, só estavam trocados, enquanto outros afirmavam que $\frac{3}{2}$ era maior pelo numerador ser maior.

Para que essa dúvida fosse sanada, foram feitos no quadro as representações geométricas que representavam essas frações, onde puderam observar que, em um dos casos, tratava-se de uma fração maior que um inteiro, logo, sendo a fração maior.

3.3.19 Décimo nono encontro: contextualização e exercícios sobre frações equivalentes parte II

No décimo nono encontro, os alunos receberam uma folha contendo as contextualizações trabalhadas nas aulas anteriores, seguidas de exercícios para uma melhor assimilação, conforme Apêndice G. Para facilitar esse processo, foram retomados os conceitos e vistos mais alguns exemplos. A professora foi auxiliando os alunos conforme necessário e foi feita a correção das atividades.

3.3.20 Vigésimo encontro: comparação de frações

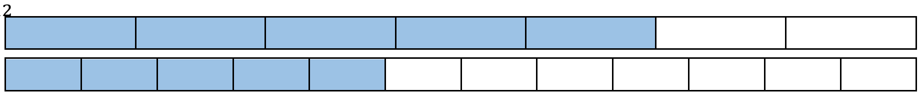
No vigésimo encontro, o objetivo foi trabalhar com os alunos sobre a comparação das frações e relacioná-las com situações-problemas. Os estudantes tiveram contato com essas comparações na dinâmica da folha de papel sulfite; portanto, possuíam conhecimentos prévios para verificar casos em aplicações e continuar a enriquecer o cognitivo. Sendo assim, a professora colocou duas frações no quadro para serem feitas as comparações de representações semióticas através dos desenhos e da forma numérica, como no Quadro 10 a seguir.

Quadro 10 - Comparação de frações

1) $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$

$Logo, \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$

2) $\frac{5}{7}$ e $\frac{5}{12}$



Logo, $\frac{5}{7} > \frac{5}{12}$

Fonte: Autora, 2022.

Posteriormente, os alunos iniciaram algumas atividades (Apêndice H) para serem resolvidas em duplas, sendo possível identificar dúvidas existentes.

3.3.21 Vigésimo primeiro encontro: comparação de frações

Inicialmente, no vigésimo primeiro encontro, os alunos continuaram a fazer a lista de atividades entregue na aula anterior, surgindo algumas dúvidas nas aplicações. Alguns aprendizes queriam, por exemplo, saber quantas páginas havia no livro na primeira questão, então, a professora explicou que essa informação não era necessária para responder à pergunta, mas que o que importava era quem tinha lido mais páginas no intervalo de tempo descrito.

Para uma melhor visualização, conforme alguns apontamentos dos alunos, a questão era lida utilizando-se os dedos e as canetas dos alunos para auxiliar na interpretação ou era lida por partes; nesse caso, os alunos iam respondendo, chegando ao final com a resposta correta. Finalizando, os alunos entregaram essas atividades para que a professora efetuasse a correção de cada um de forma individual.

3.3.22 Vigésimo segundo encontro: tipos de frações parte I

Com essa sequência de atividades, no vigésimo segundo encontro tornou-se possível nomear os tipos existentes de frações, fazendo com que os alunos efetuassem as ligações do que já tinham aprendido com os nomes apresentados. Explorando as três atividades cognitivas relacionadas à semiose, inicialmente foi feita a formação, colocando-se no quadro os títulos de fração aparente, fração própria, fração imprópria e número misto, com suas respectivas características. Em seguida, efetuou-se o tratamento desse registro, alterando o tipo de representação sem mudar o tipo de registro, ou seja, os tipos de fração serão escritos nas suas formas numéricas. Finalizando, com a ajuda dos alunos, foi feita a etapa de conversão, na qual as frações numéricas se transformaram em um registro de representação de figuras geométricas, isto é, em forma de desenho.

Os desenhos auxiliaram os alunos a identificar cada tipo de fração, podendo conceituá-las. Posteriormente, os títulos de fração imprópria e número misto foram recolocados no quadro para que os alunos pudessem notar que existe uma transformação de um tipo de representação para outro. Um dos exemplos trabalhados foi o número misto que aparece no filme Harry Potter, em que uma das plataformas de acesso é marcada como $9\frac{3}{4}$.

Após o diálogo com a turma, os alunos receberam uma lista de exercícios para trabalharem melhor esses conceitos com as frações já conhecidas (Apêndice I), concluindo a tarefa em casa, com exceção da última questão, que seria combinada na próxima aula.

3.3.23 Vigésimo terceiro encontro: tipos de frações parte II

Pelo fato de as férias escolares terem ficado entre o vigésimo segundo e o vigésimo terceiro encontro, foi iniciada a aula com uma breve revisão do que já havia sido trabalhado desde o primeiro encontro. Assim, os alunos conseguiram retomar os conceitos a partir dos questionamentos realizados pela professora e também auxiliaram na realização dos desenhos. Foi revisada a nomenclatura e a leitura das frações, fração equivalente, simplificação, fração irredutível e alguns problemas básicos.

Posteriormente a essa retomada, foi realizada a correção das atividades do Apêndice H, entregue antes das férias. Essas questões foram corrigidas de forma oral, pois os alunos compreenderam facilmente os tipos de frações e as transformações. De acordo com as instruções recebidas, não era necessário responder à última questão, pois seria feito um combinado durante o presente encontro.

Após uma conversa com a turma, optou-se por, além de entregarem uma receita contendo frações nos ingredientes e representarem essas quantidades em desenhos, aqueles que pudessem também poderiam trazer a receita para compartilhar em dois encontros subsequentes.

3.3.24 Vigésimo quarto encontro: localização das frações na reta numérica parte I

O objetivo do vigésimo quarto encontro foi trabalhar a localização das frações na reta numérica. Como os alunos foram construindo os conceitos a partir das atividades, essa etapa ficou mais fácil para ser aplicada, e os alunos continuaram no processo de enriquecimento dos subsunçores e processo da diferenciação progressiva.

Inicialmente, a professora forneceu, para cada aluno, metade de uma folha de ofício branca (cortada na horizontal), solicitando que todos desenhassem uma reta de 27 centímetros. Após, fizeram uma flecha em cada ponta, indicando que estavam fazendo apenas um pedaço da reta numérica, marcando o zero no início para, depois, fazer uma marcação a cada 5 centímetros, registrando os números na reta desta maneira: 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

A professora desenhou uma reta numérica em escala maior no quadro, e, a cada fração que foi localizada, também foram feitos os desenhos geométricos, associando, assim, o número fracionário, o desenho e a reta numérica. Findando o encontro, além do desenho, a professora mostrou como subdividir a reta numérica, para que também aprendessem a localizar sem realizar os desenhos.

3.3.25 Vigésimo quinto encontro: localização das frações na reta numérica parte II

Dando continuidade ao encontro anterior, no vigésimo quinto encontro foi retomada a reta numérica que os alunos fizeram, localizando mais alguns exemplos e efetuando no quadro juntamente com os desenhos correspondentes. Nessa etapa, os alunos perceberam que uma representação fracionária pode possuir uma quantidade inteira, isto é, pode também ser representada como um número natural. Após finalizado, todos colaram a sua reta numérica no caderno, bem como registraram cada um dos desenhos no caderno.

Como forma de visualizar esses exemplos com maior facilidade, a professora fez um material para deixar exposto na sala de aula, com os mesmos exemplos demonstrados durante o encontro. A Figura 24, a seguir, mostra como ficou esse material.

Figura 24 - Localização das frações na reta numérica

Fonte: Acervo da autora, 2023.

Depois de colado o material na parede, os alunos foram desafiados a localizar alguns valores nessa reta numérica; assim, eles se ajudavam e tentavam localizar o valor no lugar certo, explicando-o. Nesse momento, findando o encontro, os alunos guardaram o material para que pudessem entregar e compartilhar as receitas, conforme a Figura 25 a seguir e alinhado no vigésimo terceiro encontro.

Figura 25 - Localização das frações na reta numérica

Fonte: Acervo da autora, 2023.

A atividade consistia em trazer uma receita, na qual deveria ter medidas dos ingredientes na forma de número racional e o desenho que representava essa quantidade. Todos os alunos tiveram espaço para mostrar e falar sobre a sua receita em forma de diálogo. Alguns alunos conseguiram levar a receita para compartilhar com a turma toda na sala. Findando o encontro, os alunos receberam uma folha contendo uma reta numérica e algumas frações para localização, conforme Apêndice J, para ser realizada em casa e entregue na próxima aula.

3.3.26 Vigésimo sexto encontro: adição e subtração de frações parte I

No vigésimo sexto encontro, foram trabalhadas a adição e a subtração dos números fracionários, com denominadores iguais e diferentes, sendo de forma expositiva e com exercícios (Apêndice K). Os alunos já trabalharam de forma intuitiva a adição e a subtração de números fracionários com denominadores iguais, então, a partir de algumas exemplificações no quadro e questionamentos a partir dos desenhos, eles compreenderam de forma clara e fácil o procedimento.

Na sequência, eles foram questionados sobre o que poderia ser feito para somar as frações quando elas não possuem o mesmo denominador. Depois de algumas interações, eles perceberam que podiam transformar as frações em frações equivalentes. Assim, foram feitas algumas transformações de frações equivalentes para obter o mesmo denominador e poder somar ou subtrair as frações.

A aula fluiu bem, visto que os alunos já trabalharam essas questões e, nesse encontro, necessitavam apenas da contextualização e do encaminhamento das atividades. Os alunos iniciaram os exercícios do Apêndice K (apenas a primeira página) e a professora foi auxiliando conforme as dúvidas iam surgindo.

3.3.27 Vigésimo sétimo encontro: adição e subtração de frações parte II

Para dar início ao vigésimo sétimo encontro, os alunos deram sequência na realização da atividade da aula anterior. Esses exercícios foram corrigidos no caderno, para que fosse possível localizar as dificuldades. A maioria dos alunos ficou com dúvida nas letras f) e g), nas quais era necessário apenas transformar o número misto em fração imprópria para posteriormente realizar a operação. Assim, retomamos a transformação para que pudessem concluir a tarefa.

Após a correção dos cadernos, a professora passou algumas questões extras no quadro para os aprendizes realizarem durante a aula e concluírem em casa.

3.3.28 Vigésimo oitavo encontro: adição e subtração de frações parte III

O vigésimo oitavo encontro iniciou com a correção das questões extras, sendo que os alunos quiseram ir ao quadro para fazer os cálculos. Assim que toda a turma conferiu e tirou as dúvidas, eles receberam a segunda parte dos exercícios do Apêndice K (página 2 e 3), constando algumas situações-problemas que foram explicadas, dialogando-se sobre as operações que seriam necessárias em cada etapa. Os alunos estavam bem ativos e dispostos a resolver, visto que, mesmo após acabar a aula, dois alunos ficaram na sala e pediram para tentar fazer a tarefa no quadro, como forma de conferir se o pensamento deles estava correto. Foram orientados que estava correto, mas que era para concluir a atividade durante a próxima aula.

3.3.29 Vigésimo nono encontro: adição e subtração de frações parte IV

No vigésimo nono encontro, foi finalizada a etapa de adição e subtração das frações. Inicialmente, os alunos concluíram a realização das situações-problemas entregues na aula anterior, sendo que a professora ajudou a interpretar e tirou todas as dúvidas existentes nesse processo. Além disso, quando necessário, efetuava os desenhos no quadro para que visualizassem e compreendessem a escrita do problema. Após concluírem os exercícios, eles foram corrigidos no quadro passo a passo, para que todos pudessem acompanhar e conferir seus cadernos.

3.3.30 Trigésimo encontro: multiplicação e divisão de frações parte I

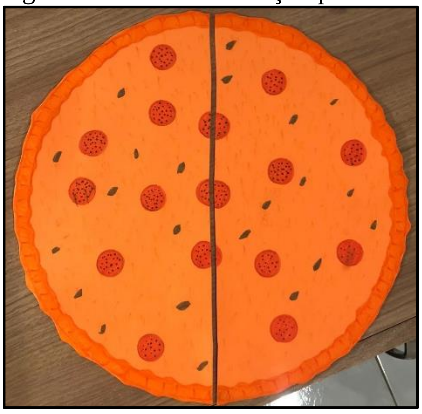
No primeiro momento do trigésimo encontro, os alunos foram relembrados de que a multiplicação é uma operação ligada à adição de parcelas iguais; sendo assim, a multiplicação de frações acontece da mesma forma. Multiplica-se a quantidade de parcelas iguais, ou seja, o número natural pela fração, da mesma forma que foi feita a escrita da dinâmica da folha de papel sulfite. Do mesmo modo, quando se tem a multiplicação de uma fração por outra fração, continua-se com a mesma regra, multiplicando numerador com numerador e denominador com denominador.

Salientou-se aos alunos que a multiplicação não é usada apenas quando queremos somar um número de parcela iguais, mas também quando queremos encontrar um valor referente a outro, por exemplo: quanto é $\frac{3}{4}\ de\ 20$. Retomando a atividade feita no décimo segundo encontro, agora não seria necessário dividir o número 20 por 4 e depois considerar 3 dessas partes, bastava multiplicar 3 por 20 e depois dividir por 4 para simplificar. Com a ajuda dos alunos, foi escrito no quadro qual o processo que utilizamos para multiplicar as frações.

Para explicar a divisão, inicialmente se contextualizou com os alunos a fração inversa a partir de algumas multiplicações que foram expostas no quadro, nas quais o resultado era sempre o número 1. Questionou-se se eles perceberam algum padrão ou o que estava acontecendo, com o objetivo de que percebessem que as frações estavam ao contrário, ou seja, são frações inversas, e foi exatamente o que eles disseram: “são números iguais, mas nas posições trocadas”. Assim, novamente com a ajuda deles, escrevemos o que era a fração inversa.

Nesse momento, foi colocado no quadro o desenho de uma pizza em E.V.A, conforme mostra a Figura 26 a seguir.

Figura 26 - Pizza da situação-problema



Fonte: Acervo da autora, 2022.

A partir dessa imagem, a professora, conversando com os alunos, escreveu uma situação no quadro em que Dona Ângela separou metade da pizza para repartir igualmente entre seus três sobrinhos. Sendo assim, metade da pizza foi dividida em 3 pedaços: $\frac{1}{2} : 3$. Comparando com a pizza inteira, cada um desses 3 pedaços equivale a $\frac{1}{6}$, logo, $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$. Também foi exemplificada essa operação com os fatores invertidos, ou seja, caso tivéssemos três maças e quiséssemos dividi-las pela metade, ou seja, $3 : \frac{1}{2}$, questionando quantos pedaços de maças terá após essa divisão. Como esperado, os alunos, a partir de seus conhecimentos e da contagem dos pedaços, responderam 6, logo, $3 : \frac{1}{2} = 6$.

Os alunos também foram questionados sobre como obter essa resposta a partir do algoritmo da divisão. Nesse momento, foi deixado um tempo para que os alunos pensassem e discutissem em duplas e trios, com a intenção de que descobrissem qual era a regra do algoritmo. Então, a professora pesquisadora orientou que, no primeiro exemplo dado, bastava apenas fazer a fração inversa do número 3, que é $\frac{1}{3}$; assim, para efetuar a divisão das frações por um número natural ou de uma fração por outra fração, basta copiar a primeira fração e multiplicá-la pela fração inversa do valor da segunda fração.

Encerrando o encontro, os alunos, divididos em duplas e trios, começaram a fazer os exercícios propostos no Quadro 11 a seguir, sendo que a professora prestou suporte quando foi solicitada por eles.

Quadro 11 - Exercícios de multiplicação e divisão de frações

1) Efetue as multiplicações abaixo e simplifique quando possível:
a) $2 . \frac{3}{7}$ b) $3 . \frac{2}{5}$ c) $2\frac{3}{7} . 5$ d) $\frac{6}{35} . \frac{7}{30}$ e) $\frac{4}{7} . \frac{3}{2} . \frac{7}{6}$

2) Efetue as divisões a seguir e simplifique quando possível:
$a)$ $\frac{3}{8} : \frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{4} : \frac{3}{2}$ c) $\frac{3}{8} : \frac{9}{2}$ d) $4 : \frac{3}{5}$ e) $\frac{3}{4} : 2$

3) Qual é o inverso de $\frac{6}{35}$?

4) Como é o inverso de $\frac{9}{25}$ escrito na forma mista?

5) Em uma classe, $\frac{3}{4}$ dos alunos são meninas e $\frac{1}{5}$ das meninas são loiras. Que fração do total da classe as meninas loiras representam?

6) O Sr. Francisco tem um terreno. Ele quer usar $\frac{1}{5}$ desse terreno para plantar flores e quer que $\frac{2}{3}$ da parte com flores tenham rosas. Que parte do terreno deverá ser plantada com rosas?

7) Mara separou $\frac{3}{4}$ de uma quantia e comprou 2 cadernos iguais. A que fração da quantia total corresponde o preço de cada caderno?

8) Se $\frac{75}{2}$ litros de leite vão ser repartidos igualmente em 4 baldes, quanto vai ficar em cada balde?

9) Se $\frac{75}{2}$ litros de leite vão ser repartidos igualmente em garrafas de $\frac{4}{5}$ litros, quantas garrafas serão necessárias?

10) Com a venda de doces, dona Carminha conseguiu ganhar R$1.600,00 neste mês. Com metade desse dinheiro ela comprou alimentos e com $\frac{1}{4}$ o material escolar de Luciana. Com $\frac{3}{8}$ do que sobrou ela comprou um vestido e o restante guardou na poupança.

a) Quanto ela gastou em alimentos?
b) Quanto custou o material de Luciana?
c) Qual é o preço do vestido?
d) Quanto foi guardado na poupança?

Fonte: autora (2022).

Essas atividades não foram concluídas em casa para serem continuadas no próximo encontro.

3.3.31 Trigésimo primeiro encontro: multiplicação e divisão de frações parte II

O trigésimo primeiro encontro tinha como objetivo a conclusão das atividades referentes ao Quadro 11. Os alunos continuaram os exercícios solicitando ajuda quando necessário. Uma das dúvidas que ocorreu nos grupos foi na parte de interpretação de problemas que envolviam a fração de uma quantidade. Assim, a professora lia e questionava a pergunta passo a passo para que compreendessem e conseguissem calcular.

3.3.32 Trigésimo segundo encontro: multiplicação e divisão de frações parte III e introdução a porcentagem

O trigésimo segundo encontro iniciou com a correção das atividades concluídas na aula anterior, sendo guiada pelos alunos, isto é, mesmo a professora efetuando a correção no quadro, eram os alunos que diziam passo a passo o que era necessário fazer. Toda a turma conseguiu acompanhar e sanar possíveis dúvidas existentes. A turma faria uma atividade para entregar envolvendo todos os conceitos trabalhados até aqui (Apêndice L), porém, por conta da quantidade de períodos, a atividade foi agendada para o trigésimo quarto encontro.

Em seguida, os alunos foram questionados sobre o que eram as promoções, para identificação dos subsunçores sobre a porcentagem. Essa identificação foi necessária, pois a partir dela pode-se perceber o que o aluno já conhece sobre o assunto, podendo efetuar ligações com o novo conhecimento mais facilmente.

Nos questionamentos que foram realizados, argumentou-se o que significa ter um desconto de 50% em uma compra. Os alunos responderam que significa metade do valor. Então, a partir das falas dos alunos, a professora escreveu no quadro a fração que equivale à metade, igual aos 50%, relacionando, assim, a porcentagem com os números fracionários.

Em seguida, a palavra porcentagem foi escrita no quadro, e os alunos foram questionados sobre o que essa palavra lembra. Cabe destacar que as palavras promoções e quantidade de bateria do celular já foram vistas nos primeiros encontros, tornando-lhes possível efetuar ligações com os subsunçores.

Eles foram orientados que, nesses casos, são feitos cálculos de porcentagem ou que ela está representando um valor menor que um inteiro, como ocorre quando a bateria do celular está em 75%. Logo, foi questionado como se pode representar o valor de 100% em uma fração, exemplificando com o *download* de um jogo e a bateria completamente carregada do celular, para deixar claro que 100% estão associados a um inteiro. Foram colocados mais alguns exemplos no quadro, associando a porcentagem com a fração de denominador cem e a fração irredutível equivalente, bem como a representação em desenho.

Posteriormente e findando o encontro, a professora salientou e anotou no quadro para que cada um registrasse em seu caderno o que é a porcentagem e a correspondência com as frações de denominadores 100 ou equivalentes, um tipo de representação dos números racionais. Essa contextualização também foi importante para que os alunos compreendessem o que é a porcentagem, sabendo diferenciar progressivamente.

3.3.33 Trigésimo terceiro encontro: a porcentagem em situações problemas

No trigésimo terceiro encontro, foram mostradas algumas situações envolvendo a porcentagem, por exemplo, a quantidade de água no nosso sangue, conforme apresenta o Quadro 12, para que eles se familiarizassem com essa nova representação do número racional.

Quadro 12 - Exemplos de porcentagem através de questionamentos

Exemplo 1) A porcentagem de água em nosso sangue é de 83%.
83 em 100 ou $\frac{83}{100}$ ou seja, 83% – oitenta e três por cento.
Isso significa que, se tivéssemos 100 litros de sangue, 83 litros seriam de água.

$$\frac{83}{100} = 83\%$$

Exemplo 2) Quando pagamos juros de 6% nas compras a prazo, significa que a cada R$100,00 pagos haverá um acréscimo de R$6,00, ou seja, 6 em 100 ou $\frac{6}{100}$ ou 6%.

$$\frac{6}{100} = 6\%$$

Exemplo 3) De cada 5 alunos da escola, 3 são meninas. Quanto por cento dos alunos são meninas?
As meninas representam $\frac{3}{5}$ dos alunos da escola. Basta transformarmos essa fração em uma fração equivalente de denominador 100, logo, $\frac{3}{5} = \frac{60}{100}$ = 60%. De cada 100 alunos da escola, 60 são meninas. Dizemos que 60 % é a taxa percentual de meninas no total de alunos da escola.

Exemplo 4) A classe de Joana está organizando uma excursão. Nela, irão 80% dos alunos da classe. Se a classe tem 35 alunos, quantos alunos dessa classe vão participar da excursão?
Precisamos calcular 80% de 35.
Já vimos de 80% = $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$
Então, calcular 80% de 35 é o mesmo que calcular $\frac{4}{5}$ de 35.
$\frac{4}{5}$ de 35 = 28, pois 35 : 5 = 7 e 4 x 7 = 35.

Fonte: Autora, 2022.

Também foram realizados desenhos divididos em partes iguais, para representar a quantidade em fração e em porcentagem, explorando e ampliando as representações semióticas. Em seguida, os alunos realizaram atividades em duplas envolvendo a porcentagem, a fração e também a transformação em desenhos geométricos (Apêndice M). As situações-problemas apresentadas envolviam o cálculo de multiplicação e divisão da porcentagem, no caso, com as representações fracionárias desses percentuais.

Neste encontro, também se iniciou o processo de reconciliação integradora, em que os conceitos até então trabalhados de forma separada foram reconciliados, excluindo essas diferenças conceituais, integrando-as, para que percebessem que se trata do mesmo valor, apenas representado de forma diferente, integrando os significados.

3.3.34 Trigésimo quarto encontro: atividade geral frações

Conforme relatado no trigésimo segundo encontro, nesta aula os alunos realizaram uma lista de atividades gerais sobre frações (Apêndice L), para ser entregue, para, a partir disso, a professora analisar como foi o aprendizado dos alunos até este momento.

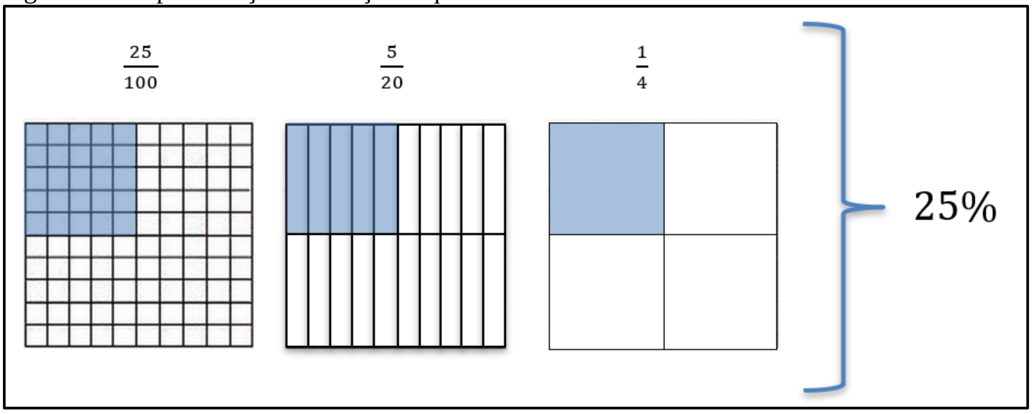
3.3.35 Trigésimo quinto encontro: fração e porcentagem parte I

Dando continuidade à representação dos números racionais na forma de porcentagem, os alunos concluíram as atividades do Apêndice M e receberam outra lista de exercícios (Apêndice N) envolvendo três tipos de representação: porcentagem, fração e desenho. Essas formas de representar a mesma quantidade reforçam a transição de um tipo de representação para outra, fazendo com que os alunos compreendam melhor que podem representar uma mesma quantidade de formas diferentes.

3.3.36 Trigésimo sexto encontro: fração e porcentagem parte II

O trigésimo sexto encontro teve bastante interação e participação dos estudantes. Foi realizada a correção dos exercícios constantes nos Apêndices M e N, sendo possível fazer quase 100% de forma oral, pois os alunos conseguiram realizar as tarefas e compreenderam os processos. Foram feitas no quadro apenas as questões em que apareceram divergências nas respostas, como no caso de alguns desenhos. Por exemplo, para representar 25%, podemos escrever $25\% = \frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ e, para fazer o desenho, podemos fazer qualquer uma dessas frações, pois, como são equivalentes, representam a mesma parte do todo, isto é, a mesma quantidade. Então foi demonstrado aos alunos esses desenhos, conforme ilustração da Figura 27 a seguir.

Figura 27 - Representações de frações equivalentes



Fonte: Autora 2023.

A partir disso, os próprios alunos, na hora da correção, já diziam que haviam feito de um jeito, mas que também podia ser feito de outra forma.

3.3.37 Trigésimo sétimo encontro: introdução aos números decimais e a relação com as frações parte I

Para iniciar o trigésimo sétimo encontro, foram realizados alguns questionamentos para a identificação dos subsunçores dos números decimais. Os alunos lembravam que número decimais são números com vírgula, então, a professora colocou alguns exemplos no quadro e perguntou qual era a função da vírgula. Como esperado, eles responderam que servia para separar a parte inteira da parte não inteira.

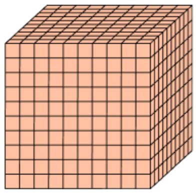
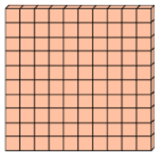
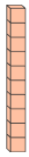
Assim, foi salientado que, até então, para ler e escrever os números, eles utilizavam o quadro posicional, localizando as quantidades inteiras. Neste momento, foi questionado o que poderia ser feito para localizar quantidades não inteiras, que era o caso das frações próprias. Desse modo, orientou-se que o quadro posicional se amplia para a direita, exemplificando no quadro, e estabelecendo, conforme a relação que eles já conheciam, que a base do sistema numérico é decimal, ou seja, de base 10. Então, a cada 10 unidades formam 1 dezena:

* 10 unidades = 1 dezena	* 10 milésimos = 1 centésimo
* 10 dezenas = 1 centena	* 10 centésimos = 1 décimo
* 10 centenas = 1 unidade de milhar	* 10 décimos = 1 unidade

Para que houvesse uma melhor compreensão, utilizou-se o material dourado, em que o bloco era a unidade de referência, a placa era o décimo do bloco, a tira era o centésimo do bloco, e o quadradinho era o milésimo do bloco. O Quadro 13 a seguir mostra os exemplos e as relações que foram trabalhados inicialmente.

Quadro 13 - Os números decimais

OS NÚMEROS DECIMAIS

			
BLOCO	**PLACA**	**TIRA**	**QUADRADINHO**

Quantos quadradinhos formam a tira?
Quantas tiras formam a placa?
Se cada tira possui__________quadradinhos, quantosquadradinhos formam a placa?
Quantas placas formam o bloco?
Quantas tiras formam o bloco?
Quantos quadradinhos formam o bloco?

Valos relacionar essas quantidades utilizando as frações, considerando <u>o bloco como unidade de referência.</u>

QUE FRAÇÃO REPRESENTA:	
a) um bloco?	e) um quadradinho em relação a tira?
b) um quadradinho em relação ao bloco?	f) um quadradinho em relação a placa?
c) uma tira em relação ao bloco?	g) três placas em relação ao bloco?
d) uma placa em relação ao bloco?	h) cinco tiras em relação à placa?

Fonte: Autora, 2023.

Em seguida, os alunos receberam uma folha, conforme Apêndice O, que foi completada juntamente com a professora pesquisadora através de questionamento. Os dois primeiros exemplos foram feitos juntos; os alunos conseguiram realizar o último de forma individual.

3.3.38 Trigésimo oitavo encontro: introdução aos números decimais e a relação com as frações parte II

No trigésimo oitavo encontro, os alunos realizaram uma atividade conforme Apêndice P, para relacionar o material dourado, que, nesse caso, substituía o desenho, a fração e o número decimal, tomando como unidade de referência o bloco.

Inicialmente, foi retomado que fração cada material representava em relação ao bloco. Os três primeiros exemplos foram feitos juntamente com a professora pesquisadora; os demais foram feitos sozinhos pelos alunos, por solicitação deles. Antes de finalizar o encontro, a turma foi orientada a concluir a tarefa em casa, frisando que poderiam utilizar a equivalência na hora de colar o material dourado, isto é, se pedisse 20 placas, poderiam ser colados 2 blocos.

3.3.39 Trigésimo nono encontro: as transformações decimais parte I

Para iniciar o trigésimo nono encontro, realizou-se a correção da atividade da aula anterior, na qual os alunos conseguiram compreender, surgindo dúvida na questão da localização das 10 placas, pois não ficou nada na casa dos décimos, então retomaram-se as relações da aula anterior para ficar mais clara a localização.

Na sequência, a professora contextualizou o número decimal, para que o aluno diferencie progressivamente esse conceito. Em seguida, mostrou as transformações de número decimal para uma fração, em que se escreve a fração cujo numerador é o número decimal sem vírgula e o denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros quantos forem as casas decimais do numeral dado. Assim: $0{,}097 = \frac{97}{1000}$. E também o processo inverso: transformar uma fração em um número decimal, em que basta escrever o numerador da fração com tantas ordens (ou casas) quantos forem os zeros do denominador. Desse modo, trabalhando com as operações de frações já conhecidas, tem-se:

- $\frac{81}{10\,000}$ representa 81 décimos de milésimos ou seja: $\frac{81}{10\,000} = 0{,}0081$.
- $\frac{4287}{1000} = \frac{4000+287}{1000} = \frac{4000}{1000} + \frac{287}{1000} = 4 + \frac{287}{1000}$, ou seja, $\frac{4287}{1000}$ equivalem a 4 inteiros e 287 milésimos.

Também foi explicado aos alunos que poderiam fazer a transformação a partir da leitura da fração, pois a localização no quadro posicional termina na classe em que se efetua a fala, por exemplo:

QUADRO POSICIONAL (ORDENS E CLASSES)						
PARTE INTEIRA				PARTE NÃO INTEIRA (DECIMAL)		
CENTENA	DEZENA	UNIDADE	,	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
C	D	U	,	d	c	m
		0	,	5	0	

→ $\frac{50}{100}$ lê-se: cinquenta centésimos

Os alunos acharam mais prático localizar pela leitura. Logo após, eles realizaram exercícios de transformações (Apêndice Q) para compreender melhor essas representações do número racional, visto que é de extrema importância praticar as atividades matemáticas. Essas atividades foram corrigidas no caderno dos alunos, para que fosse possível identificar as possíveis dificuldades.

3.3.40 Quadragésimo encontro: as transformações decimais parte II e atividades de transição

Para o quadragésimo encontro, os alunos realizaram os exercícios conforme o Quadro 14 apresentado a seguir.

Quadro 14 - Exemplos de porcentagem através de questionamentos

1) Transforme as frações decimais em numerais decimais:
a) $\frac{428}{100}$ b) $\frac{4}{10}$ c) $\frac{50}{100}$ d) $\frac{47}{1000}$

2) Transforma as seguintes frações em frações decimais e após em números decimais:
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{9}{50}$ c) $\frac{41}{20}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{4}{5}$

3) Determine as frações decimais equivalentes aos números decimais a seguir e escreva como se lê:
a) 0,841 b) 2,65 c) 0,8 d) 0,08 e)1,008 f) 3,5

4) O número 0,723 lê-se setecentos e vinte e três milésimos. Como é esse número escrito na forma de fração?

5) Como é a fração $\frac{131}{1000}$ escrita na forma decimal? Como se lê esse número?

Fonte: Autora, 2023.

Alguns alunos questionaram sobre o termo fração decimal, então, foi retomado esse conceito e o conceito de número decimal. Eles realizaram essa atividade com rapidez, sendo corrigida no quadro após a conclusão. A professora também escreveu no quadro, com a ajuda da turma, as quatro formas de representar os números racionais: fracionária, percentual, decimal e em desenho.

Na sequência, os estudantes foram instigados a realizar uma atividade que envolveu os quatro tipos de representação semiótica: fracionária, decimal, percentual e por desenho. No Quadro 15 a seguir consta o texto que foi entregue aos alunos para realização da atividade. Trata-se de um texto em que as frações estão escritas por extenso, e os estudantes precisavam identificar essas frações, escrevê-las na forma numérica, transformá-las em frações equivalentes com denominador 100 para transformar em taxa percentual e em número decimal, além de fazer um desenho que represente essa quantidade.

Quadro 15 - Exemplos de porcentagem através de questionamentos

Leia o texto a seguir. Identifique as frações que estão escritas por extenso. Faça uma tabela identificando as frações decimais, escreva-as na forma numérica, transforme em uma fração com denominador 100, represente na forma percentual e decimal. Após, faça um desenho dessas quantidades.

FRAÇÕES

[...]

– Ótimo! – exclamou de repente o Visconde. – Esta melancia veio mesmo a propósito para ilustrar o que eu ia dizer. Ela era um inteiro. Tia Nastácia picou-a em pedaços, ou frações. As frações formam justamente a parte da Aritmética de que eu ia tratar agora.

– Se pedaço de melancia é fração, vivam as frações! – gritou Pedrinho.

– Pois fique sabendo que é – disse o Visconde.

– Uma melancia inteira é uma unidade. Um pedaço de melancia é uma fração dessa unidade. Se a unidade, ou a melancia, for partida em dois pedaços, esses dois pedaços formam duas frações – dois meios. Se for partida em três pedaços, cada pedaço é uma fração igual a um terço. Se for partida em quatro pedaços, cada pedaço é uma fração igual a um quarto. se for partida em cinco pedaços, cada pedaço é uma fração igual a um quinto. se for partida em seis pedaços, cada pedaço é um sexto. se for partida em sete pedaços, cada pedaço é um sétimo. se for partida em oito pedaços, cada pedaço é um oitavo. se for partida em nove pedaços, cada pedaço é um nono. se for partida em dez pedaços, cada pedaço é um décimo.

[...]

Fonte: Trecho e imagem retirados do livro: Aritmética da Emília, de Monteiro Lobato.

Fonte: Autora, 2023.

Essa atividade teve como objetivo trabalhar a reconciliação integradora, visto que essas representações semióticas já estão bem conceituadas pelos alunos de forma separada, ou seja, houve o processo de diferenciação progressiva, em que cada tipo de representação foi conceituado e tratado separadamente. Agora, trabalhando juntamente as representações, faz-se a reconciliação integradora, excluindo as diferenças conceituais existentes dessas representações e integrando-as de forma mais significativa.

3.3.41 Quadragésimo primeiro encontro: as representações dos números racionais – atividades de transição

No quadragésimo primeiro encontro, a tabela da aula anterior foi corrigida no caderno de cada aluno, sendo que, após essa conferência, cada aluno recebeu uma tabela (Apêndice R) referente às representações semióticas dos números racionais para que os alunos a completassem.

A professora salientou que, tratando-se dos números racionais, existe mais de uma forma de representatividade. Após a finalização, foram conceitualizadas com os alunos as formas de representar um mesmo número, compreendendo que se pode transitar entre essas representações quando necessário. Dessa forma, o aluno teve a possibilidade de transição entre as diversas formas de representação semiótica dos números racionais. Essa atividade também proporcionou visualizar a face oculta da aprendizagem matemática que trata os registros de representação semiótica, pois os gestos intelectuais (as transformações feitas) vão se constituindo no cognitivo do aluno, o que só se percebe quando o aluno é exposto a alguma atividade diferenciada das já trabalhadas, observando os erros e as dificuldades existentes.

3.3.42 Quadragésimo segundo encontro: representação semiótica dos números racionais e transições parte I

Com o intuito de verificar se a sequência didática e o material utilizados são potencialmente significativos, de forma individual, no quadragésimo segundo encontro, os alunos desenvolveram uma atividade individual (Apêndice S), em que será necessário representar o mesmo valor na forma fracionária, na forma decimal, na forma percentual e por desenho, além de alguns questionários sobre os números racionais. Essas atividades foram norteadoras para verificação de identificação da aprendizagem significativa dos alunos, visto que eles precisaram aplicar os conhecimentos aprendidos até o momento a situações diferentes das trabalhadas em sala de aula, bem como descrever certos procedimentos.

Finalizado o encontro, os estudantes levaram para concluir em casa e entregar na próxima aula, para que a professora possa analisar, visualizando as possíveis lacunas nas aprendizagens dos alunos, verificando se a proposta desenvolvida favoreceu a aprendizagem significativa através das representações semióticas dos números racionais. Nessas atividades, alguns valores foram representados de quatro formas diferentes de representação semiótica, podendo o aluno fazer a transição entre um tipo de representação e o outro, que era o objetivo desta sequência didática.

Os aprendizes foram orientados a trazerem para o próximo encontro uma bandeja de isopor ou a tampa de um pote para realizar uma dinâmica.

3.3.43 Quadragésimo terceiro encontro: representação semiótica dos números racionais e transições parte II

O último encontro desta sequência didática também envolveu a avaliação dos indícios da aprendizagem significativa a partir dos registros de representação semiótica, conforme os quesitos descritos no quadragésimo primeiro encontro. Inicialmente, de forma individual, os alunos receberam 100 confetes de chocolates coloridos dentro de um pacotinho, uma régua e três folhas A4. A tarefa deles consistiu em separar as cores dos confeitos recebidos e efetuar a contagem total de cada uma das cores, bem como a contagem total. Posteriormente, em forma de tabela, deveriam realizar um registro da quantidade de cada cor em uma fração de denominador 100, fração irredutível, porcentagem, decimal e em desenho. Também deveriam explicar quais os procedimentos foram utilizados para a elaboração de cada representação feita. A Figura 28 a seguir demonstra como foi a dinâmica.

Figura 28 - Os números decimais

Fonte: Acervo da autora, 2023.

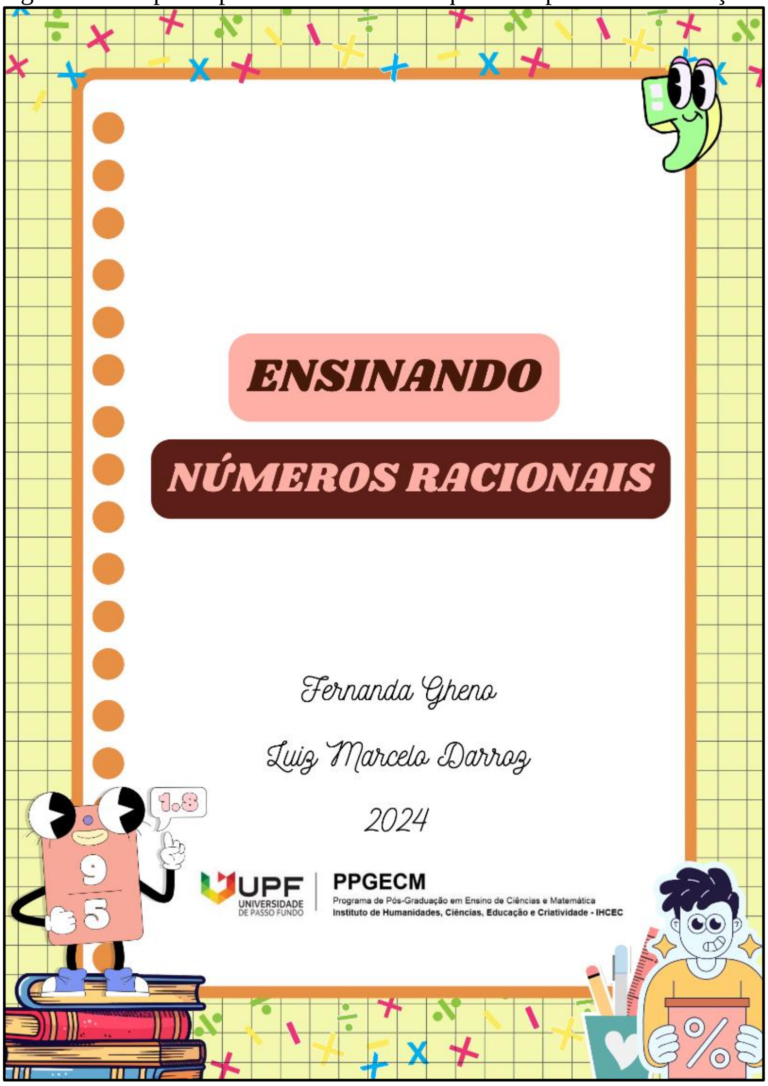
Após finalizadas as anotações, os alunos entregaram seus relatórios para que a professora analisasse os dados. Enquanto comiam os confetes, realizaram um relatório de cinco minutos para comentar o que acharam da dinâmica.

3.4 O Produto Educacional

O produto educacional oriundo da presente pesquisa constitui-se de uma sequência didática fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) e organizada metodologicamente de acordo com os pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS). Essa sequência visa auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem significativa dos números racionais introduzidos no sexto ano do Ensino Fundamental, oferecendo um material didático potencialmente significativo, com atividades que proporcionem as transições entre as representações dos números racionais.

A Figura 29 apresenta a capa do produto educacional que se encontra disponível na página do Programa de Pós-Graduação no Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM) e no Portal do Educapes: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/746124.

Figura 29 - Capa do produto educacional que acompanha a dissertação



Fonte: Autora, 2024.

Nessa perspectiva, este material didático destina-se particularmente aos professores de matemática do sexto ano do Ensino Fundamental; entretanto, ocasionalmente, poderá também ser utilizado pelos demais professores que necessitem fazer uma revisão desse conteúdo em outros anos escolares, simplificando as atividades, se necessário. A sequência didática está estruturada de maneira hierárquica, no entanto, caso o professor deseje, poderá utilizar as atividades de forma separada e incluí-las nas suas aulas.

Inicialmente, foram apresentadas brevemente as duas teorias para que o leitor pudesse conhecer um pouco mais sobre o embasamento teórico que originou o trabalho. Em seguida, foram descritos os 19 momentos (conjuntos de encontros), organizados de modo que os conceitos fossem construídos de forma intuitiva, a partir da interação com os subsunçores, visto que um encontro sempre tem relação com os anteriores, primeiramente desenvolvendo-se materiais e questionamentos, para, na sequência, contextualizar. Juntamente com cada momento, constam os Apêndices com as atividades desenvolvidas no decorrer da sequência didática e os gabaritos.

Como forma de alcançar os objetivos propostos, a sequência didática que acompanha esta dissertação foi estruturada de modo que a representação fracionária seja compreendida e bem conceitualizada, oportunizando aos estudantes ancorar facilmente as demais representações, tornando a aprendizagem significativa. Assim, dedicou-se um tempo maior para o estudo das frações e suas representações, pois é a partir delas que se trabalham as demais formas de representação dos números racionais.

Durante as atividades, foram priorizados, no mínimo, duas formas de representar o número racional, na forma numérica e em desenho geométrico. Foram utilizadas dinâmicas com o princípio de promover a interação do conteúdo com os aprendizes, proporcionando aos discentes visualizar uma representação manipulativa do conhecimento que estava em processo de construção na sua estrutura cognitiva.

Em cada momento da sequência didática, foram realizados exercícios para os estudantes estimularem o pensamento matemático, não priorizando apenas os algoritmos e as transformações possíveis, mas também aplicações em situações-problemas, pois é importante expor o aluno a cenários em que seja necessário interpretar uma questão e traçar um plano de resolução.

Em decorrência disso, a sequência está apoiada na TRRS a partir das formas de representação dos números racionais, em que são explorados mais de um tipo de representação do objeto, nas formas numéricas fracionárias, percentuais e decimais e na transformação em desenhos geométricos, possibilitando a transição entre essas representações. E, na TAS, na forma de aplicação, levando-se em consideração o que o aluno já sabe para dar sequência nos encontros, a utilização de organizadores prévios para criação de pontes cognitivas, um material potencialmente significativo no decorrer das atividades e materiais criados pelos alunos, a disposição dos sujeitos em aprender, pois quando se tornam parte do processo de aprendizagem, engajam-se mais querendo aprender. A sequência está organizada e elaborada de forma hierárquica, envolvendo o processo que ocorre na estrutura cognitiva do sujeito, seguindo a diferenciação progressiva na evolução das ancoragens em cada encontro e da reconciliação integradora ao final, quando as diferenças conceituais são eliminadas, tornando-se claro que os números racionais podem ser escritos de formas diferentes, com representações diferentes, mas representando o mesmo valor.

Na sequência deste trabalho, apresentam-se a metodologia de pesquisa e os instrumentos que foram utilizados para a coleta de dados, bem como os procedimentos de análises da aplicação da sequência didática.

4 A PESQUISA

O presente capítulo apresenta os aspectos metodológicos da pesquisa desenvolvida e tem a finalidade de descrever os aportes teóricos da pesquisa qualitativa, com a intenção de validar o estudo. Além disso, demonstra os instrumentos que foram utilizados para a coleta de dados na aplicação da proposta e os procedimentos adotados para a análise dos resultados obtidos, verificando a contribuição positiva do material criado.

4.1 Classificação da pesquisa

O âmbito escolar é de extrema importância para a formação dos aprendizes que o permeiam, tanto no sentido de aprendizagens de áreas diversas, quanto em sua formação de cidadão crítico, capaz de viver e conviver em sociedade, comunicando-se e tomando decisões. Analisar esse contexto de sala de aula não apenas com um olhar pedagógico, mas também com um olhar de professor pesquisador é um grande desafio.

Estudar a própria prática educacional necessita de aportes teóricos para embasamento da pesquisa qualitativa, a qual tem como condição analisar a qualidade dos dados e não a quantidade de elementos. A abordagem qualitativa é assim definida por Bogdan e Biklen (1994, p. 49):

> A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo [...]. Nada é considerado como um dado adquirido e nada escapa à avaliação. A descrição funciona bem como método de recolha de dados, quando se pretende que nenhum detalhe escape ao escrutínio.

Nesse sentido, os autores destacam que a pesquisa qualitativa envolve os dados em forma de palavras e imagens, não dando importância à quantidade de dados recolhidos, portanto, uma laboração descritiva. Para Gil (2017), as pesquisas qualitativas apresentam resultados de descrições verbais, podendo ser estudos de caso, pesquisas narrativas, etnográficas, pesquisa participante, entre outras; ou seja, segundo o autor, envolve a participação do pesquisador e dos sujeitos da pesquisa. Nessa mesma perspectiva, Creswell (2007) descreve a pesquisa qualitativa como interpretativa, abrangendo estratégias perante a coleta e análise de dados, baseando-se em textos e imagens, sendo que o investigador normalmente está envolvido com os participantes.

À vista das descrições dos autores, a presente pesquisa classifica-se como pesquisa qualitativa, visto que pretende analisar o desenvolvimento da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), no decorrer da sequência didática, observando o progresso dos participantes perante as atividades propostas. A intenção é verificar se as duas teorias contribuem para a aprendizagem significativa dos números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental, utilizando representações semióticas. Para isso se fazem necessários o estudo das teorias escolhidas, a composição das atividades e os encontros programados de uma forma hierárquica, bem como a avaliação do avanço cognitivo dos alunos. Para esse avanço ser analisado, necessita-se de registros da professora, que é também a pesquisadora, efetuando a coleta e a verificação dos dados. A relevância da pesquisa está, portanto, na qualidade do conhecimento que os participantes tendem a construir e não na quantidade numérica de elementos utilizados e recolhidos.

Por conseguinte, preocupar-se com o contexto da sala de aula se faz essencial para o desenvolvimento da pesquisa, a fim de analisar se, nos materiais produzidos, é possível identificar a aprendizagem significativa dos participantes da sequência didática elaborada. Para tal, é necessário verificar algumas características da pesquisa qualitativa. Bogdan e Biklen (1994) descrevem cinco características dessa investigação: (I) fonte de dados – deve ser considerado o ambiente natural de atuação da pesquisa, e o pesquisador é o responsável pelas atividades relevantes e coleta de dados produzidas, independentemente do tipo de material utilizado para tal; (II) investigação descritiva – não utilizar números, e, sim, palavras ou imagens nos dados analisados; (III) sobre o processo – dar ênfase à importância do processo da pesquisa e não apenas aos dados obtidos; (IV) análise intuitiva – os investigadores qualitativos devem analisar os dados indutivamente, isto é, o objetivo do pesquisador não deve ser confirmar ou não uma hipótese, mas chegar a conceitos e representações na medida em que a coleta de dados ocorre; (V) significação – os significados são importantíssimos na abordagem qualitativa, uma vez que devem ser atribuídos aos sujeitos durante as investigações a partir de métodos e atividades relevantes e como diferentes pessoas significam o mesmo objeto.

Essas características mostram que é essencial existir o contato direto entre pesquisador e sujeitos participantes. De acordo com Creswell (2007), a pesquisa qualitativa acontece em um ambiente natural, necessitando a presença do pesquisador onde estiver o sujeito da pesquisa, permitindo ao pesquisador um detalhamento a partir das estratégias escolhidas, que possuem grande influência nos procedimentos. Assim sendo, é relevante que a professora da sala de aula que aplicará a proposta seja a própria pesquisadora, uma vez que conseguirá manter um bom relacionamento e vínculo com os sujeitos da pesquisa. Conforme Bogdan e Biklen (1994, p.

48), “os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência”. Nesse sentido, Mertens (*apud* Creswell, 2007, p. 187) descreve:

> O pesquisador qualitativo reflete sistematicamente sobre quem é ele na investigação e é sensível à sua biografia pessoal e à maneira como ela molda o estudo. Essa introspecção e esse reconhecimento de vieses, valores e interesses (ou refletividade) tipifica a pesquisa qualitativa atualmente. O eu pessoal torna-se inseparável do eu pesquisador. Isso também representa honestidade e abertura para pesquisa, reconhecendo que toda investigação é carregada de valores.

Portanto, é essencial o vínculo entre o pesquisador e os participantes dentro da pesquisa qualitativa, incluindo, ainda, as estratégias utilizadas para a validação dos dados. A seguir, serão descritos os instrumentos escolhidos para a coleta e análise dos dados da pesquisa.

4.2 Os instrumentos da coleta de dados

Como forma de validação da pesquisa, buscaram-se elementos para a coleta de dados com a intencionalidade de analisar a proposta didática sobre os números racionais, estruturada de acordo com os pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa relacionada à Teoria dos Registros de Representação Semiótica. É relevante que essa coleta considere a construção dos conhecimentos dos sujeitos a partir dos seus conhecimentos prévios e a transição de um tipo de representação para outro.

A escolha dos instrumentos levou em consideração a proximidade da pesquisadora com os participantes, bem como a forma em que a sequência didática foi estruturada. Sendo assim, os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram: o diário de bordo, feito pela professora investigadora durante os encontros; os materiais construídos e as atividades realizadas pelos aprendizes (envolvendo cálculos, desenhos e descrições), recolhidas ao final de alguns encontros.

O diário de bordo, ou diário de aula, conforme trata Zabalza (2004, p. 13), define-se como “documentos em que professores e professoras anotam suas impressões sobre o que vai acontecendo em suas aulas”. Assim, ao final de cada encontro, a professora pesquisadora descreveu o que aconteceu e fez as anotações que julgou pertinentes. Zabalza (2004) salienta que, embora se chame diário, não precisa ser algo feito todos os dias, podendo ser relatado até duas vezes na semana, desde que seja dentro de um sistema bem organizado e que contenha uma continuidade. Todavia, os diários foram elaborados todos os dias, para que não se perdesse nenhuma informação importante, podendo analisar os dados mais detalhadamente.

Zabalza (2004) descreve que os diários fazem parte de documentos pessoais ou narrações autobiográficas que envolvem uma orientação qualitativa, destacando duas relações que eles possuem: (I) a riqueza formal que apresentam, pois quanto mais informações, mais rico eles serão; (II) a minuciosidade das observações dos dados recolhidos, podendo analisar a evolução dos dados. Além disso, destaca que os diários podem possibilitar aos professores a revisão dos elementos do seu cotidiano pessoal, que, muitas vezes, permanecem escondidos da sua visão por estar muito ligado à sua prática diária.

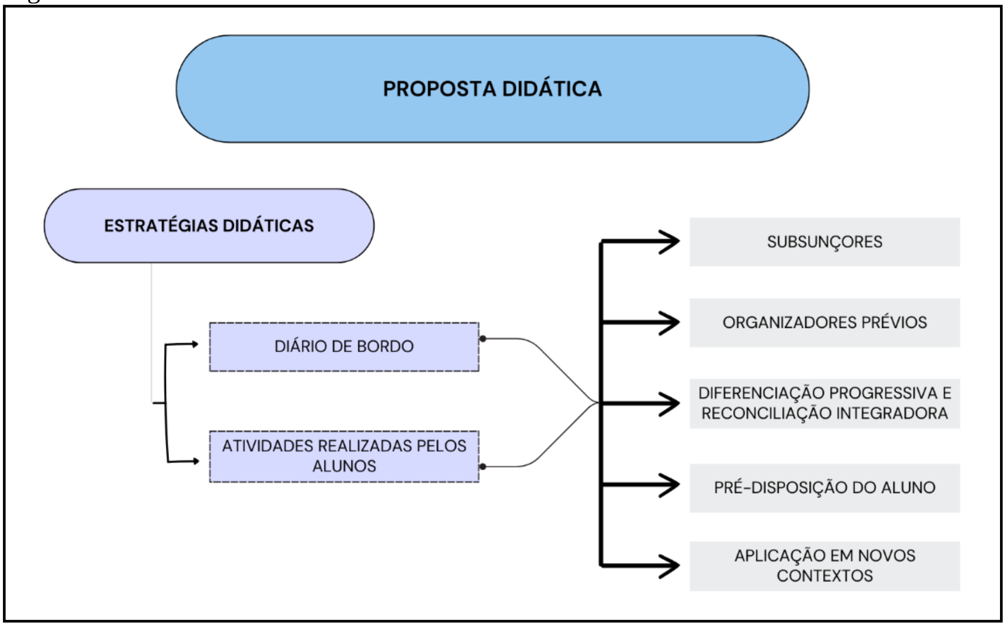
Tratando-se de uma pesquisa qualitativa, com a qual a pesquisadora terá contato direto com os participantes, visto que é a professora da turma em que a proposta será aplicada, o diário de bordo será um instrumento eficaz para a coleta dos dados. Afinal, "escrever sobre si mesmo traz consigo a realização dos processos a que antes referimos: racionaliza-se a vivência ao escreve-la (o que tinha uma natureza emocional ou afetiva passa a ter, além disso, natureza cognitiva, tornando-se assim mais manejável) [...]" (Zabalza, 2004, p. 18). Com base nisso, os diários de bordo servirão para análise e reflexão da própria prática da professora pesquisadora em sala de aula.

No decorrer da proposta da sequência didática, os alunos responderam algumas atividades que foram recolhidas, nas quais precisavam representar um mesmo valor de formas diferentes, fazendo com que transitassem de um tipo de representação para outro. Assim, além da forma numérica fracionária, decimal e percentual, necessitaram realizar desenhos que representassem essa quantidade e comentar como resolveram tal procedimento.

4.3 Procedimentos de análise

A coleta de dados a ser realizada a partir dos instrumentos descritos na seção anterior será analisada a partir de cinco categorias a *priori*: subsunçores, organizadores prévios, diferenciação progressiva e reconciliação integradora, pré-disposição do aluno em aprender e a aplicação em novos contextos, conforme demonstrado na Figura 30 a seguir.

Figura 30 - Instrumentos da coleta



Fonte: Autora, 2024.

As estratégias didáticas foram avaliadas, de acordo com a coleta de dados, a partir da divisão em subcategorias, analisando os materiais elaborados pela professora e pelos participantes, que serão descritos mais detalhadamente a seguir.

Na categoria subsunçores, buscou-se identificar os conhecimentos prévios dos participantes, com a finalidade de destacar o que eles já conheciam sobre fração, porcentagem e número decimal. Na sequência, a partir dos organizadores prévios, buscou-se analisar se os organizadores prévios auxiliaram o aprendiz na ligação das informações conhecidas com as novas. Posteriormente, na categoria diferenciação progressiva e reconciliação integradora, buscou-se analisar se os participantes conseguiram compreender cada conceito de forma separada, cada um com suas características e representações e excluir essas diferenças integrando os conhecimentos. Na categoria pré-disposição do aluno, buscou-se verificar se o aprendiz queria aprender mais sobre o assunto, isto é, se o assunto era pertinente para que ele se interessasse e, por fim, buscou-se analisar se os alunos conseguiram aplicar os conhecimentos construídos em novos contextos, diferentes dos trabalhados nos encontros. Também foram analisadas as representações semióticas nas categorias a *priori*.

O diário de bordo que foi efetuado diariamente teve as descrições dessas informações detalhadas para que a pesquisadora pudesse analisar como um todo, se as estratégias estabelecidas foram válidas.

5 RESULTADOS

Neste capítulo, são analisados e discutidos os resultados provenientes da aplicação da sequência didática. Essa análise, como previamente mencionado no capítulo anterior, fundamenta-se no diário de bordo da professora pesquisadora, nos materiais e nas atividades desenvolvidas ao longo da aplicação e nas tarefas entregues pelos alunos. Assim, a continuação deste capítulo está subdividida conforme as categorias a *priori*: subsunçores, organizadores prévios, diferenciação progressiva e reconciliação integradora, predisposição do aluno em aprender e aplicação em novos contextos. Cada subdivisão detalha o momento em que a ação ocorreu para análise e, quando pertinente, é acompanhada da utilização da representação semiótica.

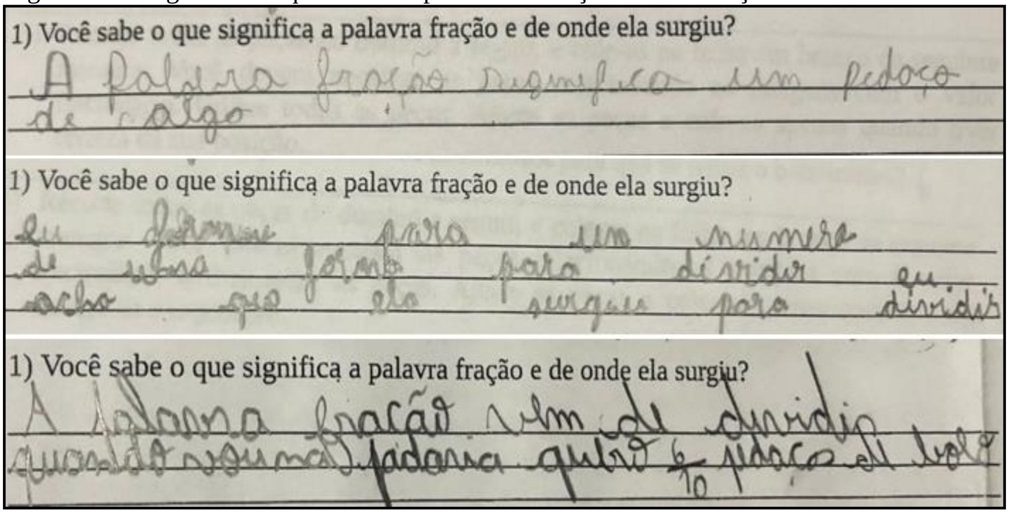
5.1 Subsunçores

Ausubel (1968, *apud* Moreira, 1999) destaca a importância dos conceitos fundamentais, denominados subsunçores. Eles funcionam como uma âncora para a construção e compreensão de novos conceitos e informações, sendo primordial para a construção de uma aprendizagem significativa. Segundo Moreira (2012), os subsunçores podem ser de diversas formas, como proposições, modelos mentais ou ideias, mas precisam ser conceitos já existentes na estrutura cognitiva de quem está aprendendo, isto é, subsunçores são conhecimentos prévios essenciais para se aprender novos conhecimentos.

A primeira evidência de existência de subsunçores na estrutura cognitiva dos participantes é verificada no diário de bordo da professora pesquisadora referente ao primeiro encontro e no questionário entregue para identificação dos subsunçores sobre frações. Conforme é apresentado no registro do diário de bordo do dia 10/05/2023, “No momento em que foi conversado com os alunos sobre a aplicação do questionário, eles ficaram aflitos, pois estavam com receio de ser algo muito difícil, mas, ao visualizarem as questões, foi possível identificar falas como: ‘ah! É fração, é fácil’ e ainda: ‘a gente já viu isso ano passado’”.

Na primeira pergunta do questionário, foi solicitado que os participantes escrevessem o que entendiam que significava a fração e de onde ela surgiu. Notou-se que os alunos já conheciam um pouco sobre o assunto, conforme Figura 31 a seguir.

Figura 31 - Pergunta 1 do questionário para identificação dos subsunçores

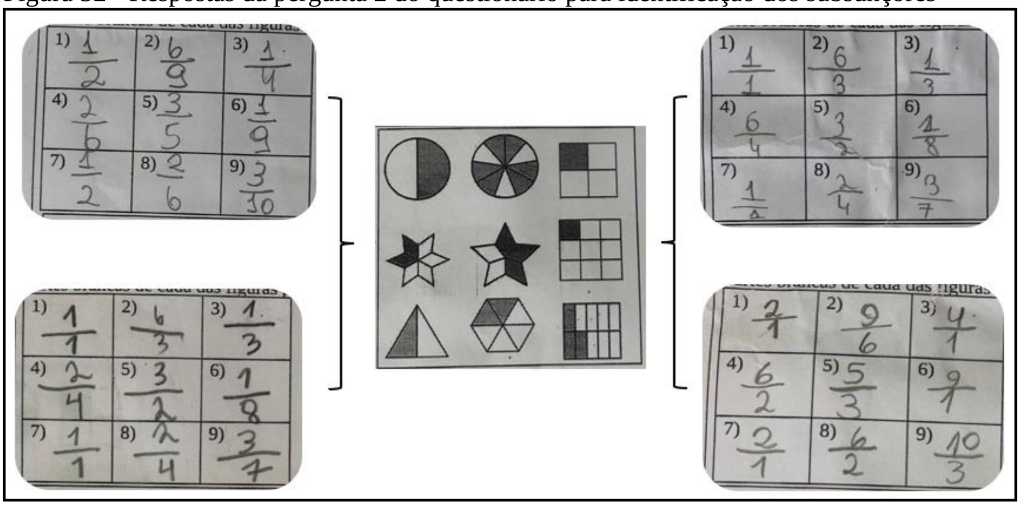


Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Na segunda questão, solicitava-se que representassem a parte colorida existente em relação à quantidade de partes brancas de cada uma das nove figuras por meio de uma fração (Figura 32). De acordo com o diário de bordo do mesmo dia, “Na segunda questão, um estudante perguntou ‘Qual número vai em cima e qual vai em baixo’, querendo saber se era o número que representava a parte colorida que ia na parte de cima ou a parte que estava sem pintar’”.

Nesse momento, observou-se que os alunos confundiram os conceitos, pois houve casos em que eles representaram a fração considerando: o número de partes pintadas em relação às partes não pintadas; o número de partes pintadas em relação ao total de partes em que a figura estava dividida; o número de partes em que a imagem estava dividida em relação à quantidade que foi pintada.

Figura 32 - Respostas da pergunta 2 do questionário para identificação dos subsunçores



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

A terceira pergunta solicitava escrever algumas frações por extenso, aparecendo frases como:

- $\frac{10}{2}$ = "dez terço de dois" / "dez de dois" / "dez por dois" / "dois dez avos"
- $\frac{3}{10}$ = "três terço de dez" / três por dez" / três terços e dez décimos / "dez três avos" / dez terços"

A pergunta número quatro envolvia uma situação em que um bolo foi dividido em três partes iguais para que três pessoas comessem a mesma quantidade. Pedia-se:

a) Que fração representa a parte de bolo que cada uma das pessoas comeu?

Respostas: " $\frac{1}{3}$ " , " $\frac{3}{1}$", " $\frac{3}{3}$"

b) Que fração representa a parte de bolo que duas pessoas comeram?

Respostas: "$\frac{2}{3}$", "$\frac{3}{2}$"

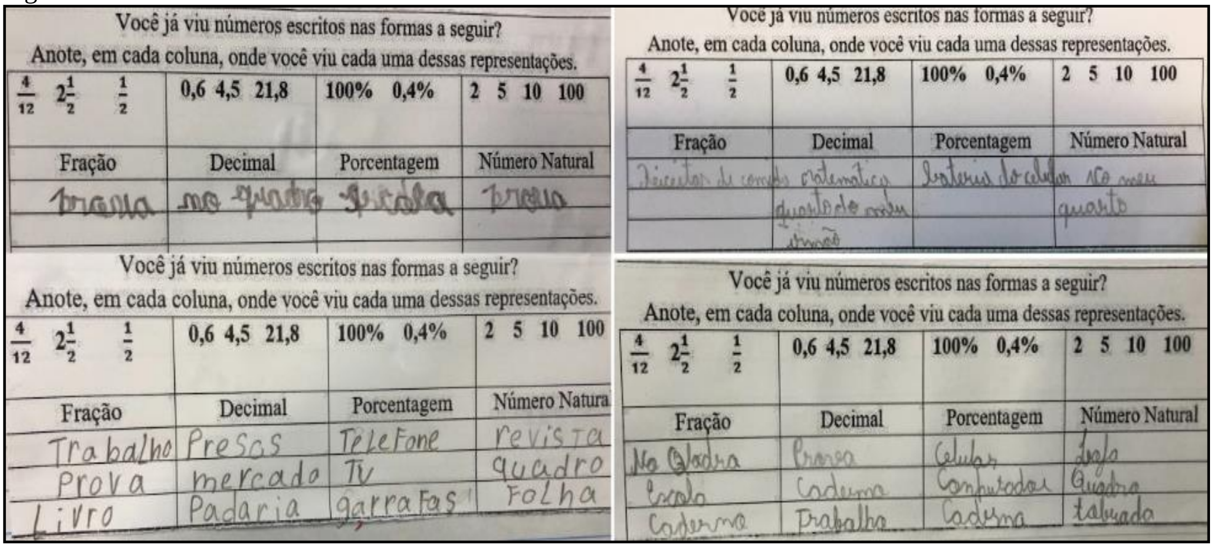
c) Quantos terços de bolo são necessários para que se tenha o bolo inteiro?

Respostas: "3 terços", "$\frac{3}{3}$"

Já o dominó, que deveria ser montado relacionando a quantidade fracionária com as representações geométricas, não foi respondido pelos alunos. O primeiro motivo foi pelo fato de terem levado essa tarefa para realizar em casa, e o segundo, conforme relatado pelos alunos, eles não sabiam montar ou não haviam compreendido o enunciado.

Outra evidência foi observada no segundo encontro, no qual, após a professora pesquisadora trabalhar o surgimento dos números racionais, a turma deveria escrever em que lugares já haviam visto aquelas representações. Conforme Figura 33 apresentada na sequência, os alunos destacaram várias ocasiões em que visualizaram tais números; a partir disso, a professora fez alguns questionamentos para que eles pensassem um pouco mais e foram surgindo mais respostas.

Figura 33 - Tabela números racionais



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

No terceiro e quarto encontro, durante a atividade de bolinho de argila, também foram observados subsunçores sobre as frações, já fazendo ligação com a representação semiótica, isto é, relacionando a fração com a sua representação geométrica.

> Os alunos foram questionados sobre como poderia ser feito o desenho para representar o bolo dividido em duas partes iguais. Um aluno respondeu: “faz um círculo, divide no meio e pinta um”. O desenho foi feito no quadro conforme a orientação recebida, mas como a turma estava trabalhando com círculos e quadrados, outro aluno disse que era para “desenhar um quadrado, fazer um risco no meio e pintar um lado” (Diário de bordo, registro dia 16/05/2023).

E ainda:

> Ao serem questionados se tinha o mesmo sentido dizer um bolo inteiro ou dois meios bolos, responderam que o nome era diferente, mas era a mesma coisa. Já, em outra questão, quando deveriam dividir pela metade cada metade de bolo, e questionados com quantas partes ficaram, responderam “quatro”, antes mesmo de dividir a argila. Ao serem questionados sobre como representar essa quantidade na forma numérica, surgiram termos como: “quatro quatro”, e na hora do desenho era preciso “fazer um quadrado e dentro uma cruz” ou “dois riscos assim e assim” (gesticulando com as mãos). Nesse momento, foram questionados se poderia ser pintado qualquer uma das quatro partes, e os comentários da turma foram que sim, pois as partes eram todas iguais (Diário de bordo, registro dia 17/05/2023).

Dessa atividade, conforme o diário de bordo, a única parte em que os participantes não conseguiram compreender o enunciado foi na última questão, pois não visualizavam que três sextos de bolo equivaliam à metade do bolo. Então, a professora pesquisadora solicitou para que eles cortassem as argilas novamente, a fim de visualizarem a equivalência usando o material.

A identificação dos conceitos subsunçores também foi necessária na etapa de introdução do assunto porcentagem, quando foram feitos questionamentos em forma de diálogo com a turma. A partir do diário de bordo do dia 15/08/2023, a turma foi questionada sobre o que eram promoções, e as respostas que apareceram foram "algo que paga menos", "tem uma promoção, tipo pague um e leve dois". A partir disso, a professora pesquisadora instigou aos alunos sobre o que normalmente aparecia junto com a informação da promoção, e os comentários foram: "o por cento", "um símbolo". Assim, conforme os apontamentos da turma, a professora seguiu o diálogo para posteriormente contextualizar a porcentagem.

Seguindo esse mesmo contexto, conforme o diário de bordo do dia 28/08/2023, foram evidenciados os conceitos subsunçores sobre os números decimais. Também em forma de diálogo, os participantes foram questionados sobre o que eram números decimais. Um aluno prontamente disse que eram "números com vírgula", então a professora complementou a pergunta solicitando o que era a vírgula, ou melhor, qual era a função dela no exemplo demonstrado no quadro. A resposta foi certeira: "separar a parte inteira da não inteira". No diálogo também foi utilizado o exemplo do dinheiro e dos centavos.

A partir das análises apresentadas, referentes aos relatos da professora pesquisadora em seu diário de bordo e as produções dos participantes, foi possível perceber que os aprendizes possuíam um conhecimento prévio do que é uma representação fracionária, entretanto não sabiam o que ela significava de fato. Não sabiam, portanto, o que era o numerador e o denominador e nem o que cada uma dessas nomenclaturas indicava. Em decorrência disso, foi necessário efetuar as ligações com essa representação conhecida e os novos conceitos de fração como parte de um todo.

Foi evidente que existiam, além dos subsunçores sobre frações, conhecimentos prévios de porcentagem e de número decimal. E esses conceitos iniciais eram as pontes para fazer as novas conexões com o que eles aprenderiam.

As identificações dos subsunçores foram essenciais para compreender como o aluno interpreta, isto é, o que ele já conhece que pode ser utilizado como uma isca para agregar mais conhecimento que, de fato, faça significado em sua estrutura cognitiva. Para que essas ligações ocorressem, a sequência didática seguiu com vários diálogos, tentando conectar um encontro no outro, para que nenhum ficasse isolado e sem sentido. Assim, em todos os encontros, era necessário lembrar ou perceber comentários e atividades dos anteriores, fazendo uma construção de conhecimento de uma forma hierárquica, organizada e com sentido para o aprendiz.

Da mesma forma, foi possível identificar os subsunçores sobre a representação semiótica. Apesar da nomenclatura ser irreconhecível pelos alunos, eles executam isso a partir da escrita numérica e da representação geométrica. Nas atividades em que os alunos sabiam representar o desenho da fração que estava sendo trabalhada, evidenciaram a representação geométrica alinhada à escrita fracionária. Da mesma forma, quando foram efetuados os desenhos que representavam a porcentagem, os números decimais e as frações, o que será detalhado mais adiante no item 5.3.

No que diz respeito ao tempo de aplicação, foi demandado um tempo maior do que o planejado, visto que, além das demandas da escola, também era necessário deixar um tempo para que os participantes pensassem e participassem do diálogo e das atividades propostas, expondo suas opiniões. Assim, a dinâmica do bolinho de argila, por exemplo, demorou o dobro do tempo que estava previsto para aplicação.

5.2 Organizadores prévios

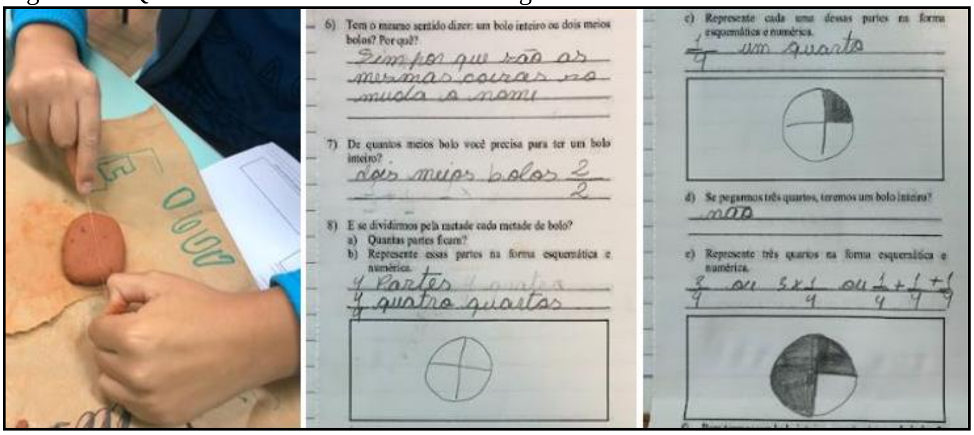
Na concepção de Ausubel, fazer a utilização de organizadores prévios serve para instigar a estrutura cognitiva do aprendiz como forma de favorecer a aprendizagem significativa. De acordo com Moreira (2018, *apud* Darroz; Loreian; Rosa, 2020), indica-se a utilização do organizador prévio expositivo quando a informação ou o material se apresentam completamente novos para o aprendiz, isto é, quando os subsunçores ainda não foram formados em sua estrutura cognitiva. Por outro lado, quando já existem subsunçores e o material é familiar ao aluno, a sugestão é a utilização do organizador prévio comparativo, desempenhando um papel fundamental para estabelecer conexões entre o conhecido e o novo.

Para Ausubel (2003, p. 11), "um organizador avançado é um mecanismo pedagógico que ajuda a implementar estes princípios, estabelecendo uma ligação entre aquilo que o aprendiz já sabe e aquilo que precisa de saber, caso necessite de apreender novos materiais de forma mais activa e expedita". Nesse sentido, esta categoria buscou identificar atividades que serviram como organizadores prévios para efetuar as ligações entre o que já era conhecido pelos alunos e as novas informações.

A atividade envolvendo o bolinho de argila desempenhou um papel relevante como um organizador prévio comparativo, estabelecendo uma ponte cognitiva entre o conhecimento prévio dos alunos e a ideia inicial de fração. Ainda, explorando a representação semiótica, relacionou-se os desenhos geométrico das respectivas frações.

Inicialmente, os participantes responderam, juntamente com a professora pesquisadora, um questionário envolvendo as frações a partir de um bolinho feito de argila. Além da representação fracionária, também precisavam representar a quantidade em desenho. O encontro, conforme relatado no item 3.3, teve participação ativa dos alunos e um ótimo diálogo. Essa abordagem demonstrou-se eficaz conforme Figura 34 e registro no diário de bordo a seguir.

Figura 34 - Questionário dinâmica bolinho de argila



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Posteriormente ao questionário, a professora fez com que essa atividade tivesse mais sentido, aplicando-a em uma situação real.

> Após a finalização do questionário, a professora disse aos alunos que a turma estava trabalhando com as frações a partir de um bolo de argila e que, naquele momento, seria feito o mesmo, porém aplicando isso em uma situação real. Assim, a professora pegou o bolo de chocolate em formato retangular que havia levado e solicitou três voluntários que, com a ajuda dos colegas, desenvolveriam a atividade.
> Professora: Como faremos para cortar esse bolo para que cada pessoa da sala coma a mesma quantidade?
> Alunos: Tem que dividir.
> Professora: E o que é necessário fazer antes da divisão?
> Alunos: Saber quantas pessoas tem na sala.
> Após efetuada a contagem, os voluntários foram até o quadro para fazer a representação geométrica de como seriam feitos os cortes no bolo.
> Professora: Então, qual a fração representa a parte que cada aluno vai comer?
> Alunos: Um.
> Professora: Um em relação a quem? E em quantas partes o bolo vai ser dividido?
> Alunos: Em vinte e cinco.
> Professora: E quantos pedaços desses vinte e cinco cada um vai comer?
> Alunos: Um.
> Professora: Então como podemos representar essa quantidade em fração?
> Alunos: Um barra vinte e cinco.
> Assim, os voluntários escreveram no quadro, ao lado do desenho, a fração $\frac{1}{25}$ (Diário de bordo, registro dia 17/05/2023).

A Figura 35, apresentada a seguir, demonstra o processo que foi relatado no diário de bordo da professora.

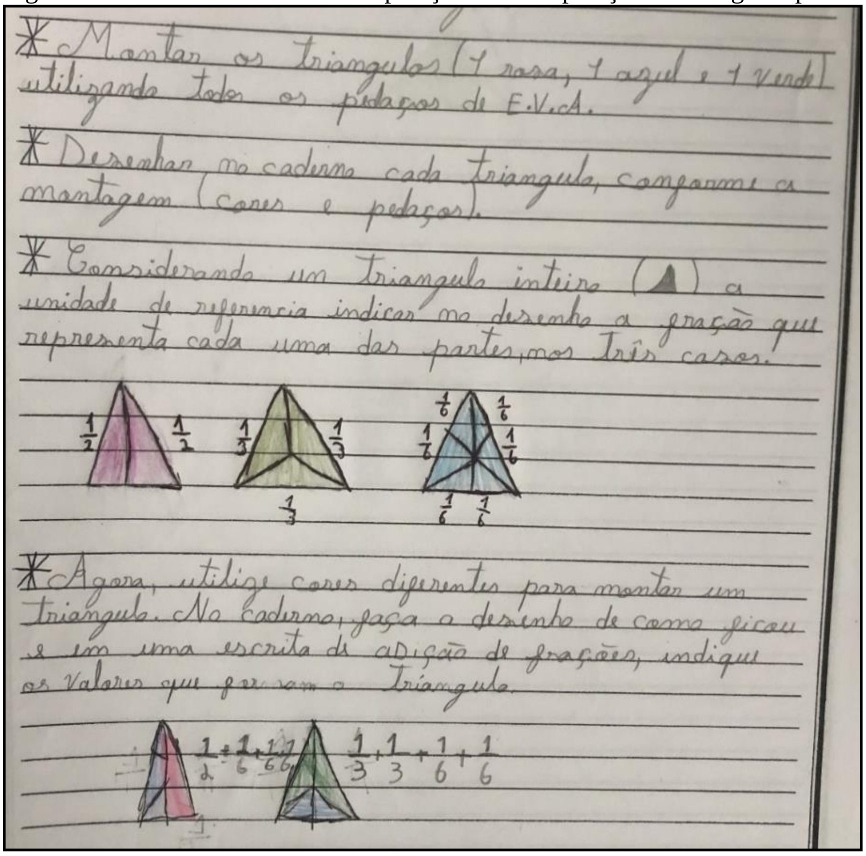
Figura 35 - Aplicação da dinâmica bolinho de argila

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Além da atividade mencionada, a dinâmica envolvendo a composição e decomposição de triângulos também desempenhou o papel de organizador prévio. Nesse contexto, os participantes estabeleceram conexões entre as partes de uma figura e sua totalidade. Eles demonstraram habilidade ao representar geometricamente e expressar, por meio de adição de frações, os valores correspondentes.

Inicialmente, os alunos foram orientados a montar os três triângulos fornecidos, cada um colorido de maneira distinta. Após a conclusão dessa etapa, deveriam efetuar o desenho e escrever a fração que representava cada uma das partes dos triângulos montados. Em seguida, foram desafiados a montar triângulos completos misturando as cores, e, da mesma forma, ilustrar e expressar, por meio da adição de frações, como o triângulo inteiro foi montado. A Figura 36 demonstra os processos realizados por um dos grupos.

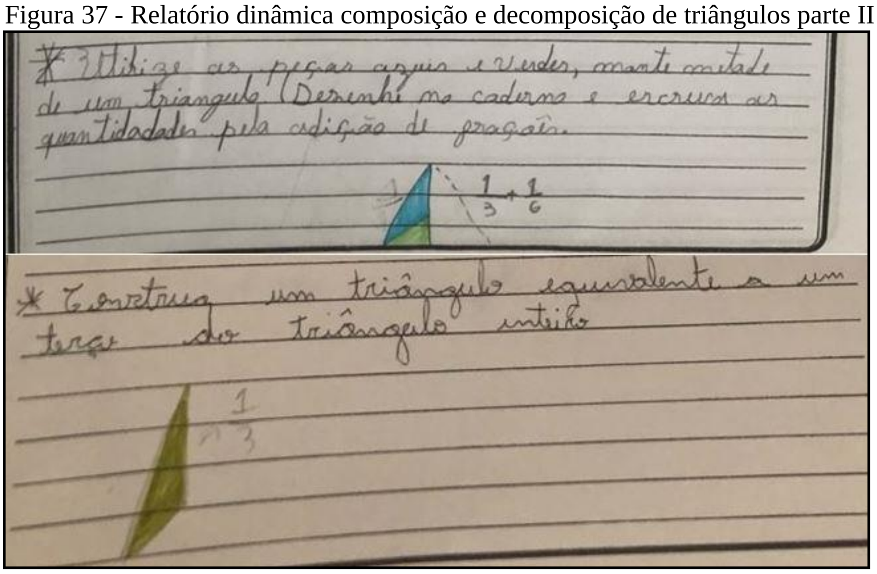
Figura 36 - Relatório dinâmica composição e decomposição de triângulos parte I



Fonte: dados da pesquisa (2023).

Na sequência, utilizando apenas as cores azuis e/ou verdes, os participantes deveriam montar o equivalente a metade de um triângulo inteiro e, logo após, sem mencionar quais cores poderiam ser utilizadas, deveriam montar $\frac{1}{3}$ do triângulo inteiro, conforme a Figura 37 a seguir.

Figura 37 - Relatório dinâmica composição e decomposição de triângulos parte II



Fonte: dados da pesquisa (2023).

A partir da dinâmica realizada, a professora iniciou um breve diálogo, conforme registrado no diário de bordo.

> Professora: Na última etapa da dinâmica, não estava mencionado as cores que deveriam ser utilizadas. De que forma podemos montar $\frac{1}{3}$ do triângulo inteiro?
> Alunos: Uma peça verde ou duas peças azuis.
> Professora: E porque não poderia ser utilizado uma peça de cor rosa?
> Alunos: Porque a rosa é maior, $\frac{1}{2}$ é maior que $\frac{1}{3}$ (Diário de bordo, registro dia 12/06/2023).

Dado o exposto, houve sinais de que essa atividade foi um organizador prévio comparativo, na medida em que os alunos efetuaram diversas ligações entre o que já conheciam sobre as frações e as situações diferentes. Outro indício ocorreu nos encontros décimo terceiro, décimo quarto e décimo quinto. Nesses encontros, exploraram-se as frações equivalentes, utilizando o material de Cuisenaire como organizador prévio comparativo. No registro da professora pesquisadora, observa-se:

> Para iniciar o encontro, foi explicado para a turma o que era a escala cuisenire, material formado por peças em que cada cor possui um valor. Em seguida, receberam um questionário que seria respondido junto com a professora. O questionário deveria ser respondido na forma numérica e em desenho geométrico. Para efetuar os desenhos, foi medido a peça laranja (10 centímetros), e os alunos deveriam seguir exatamente a medida de cada peça para anotar no caderno. Alguns alunos associavam, por exemplo, se a laranja tem 10 centímetros e precisa de duas peças amarelas para formar a peça laranja, então a amarela mede a metade, 5 centímetros. Outros alunos mediam cada peça com a régua (Diário de bordo, registro dia 20/06/2023).

No questionário, alguns alunos enfrentaram dificuldade nas questões 4 e 5, ambas relacionadas à interpretação. A professora esclareceu que quando a pergunta era “quantos” referia-se à quantidade total de peças, enquanto “que parte” remetia a um pedaço, uma parte da unidade de referência.

Outra dificuldade foi identificada na solicitação de qual parte da barra laranja representava a barrinha bege. É o que se observa no Diário de Bordo no dia 21/06/2023:

> *Professora: “Essa barrinha bege, é que parte desta laranja? (mostrando as peças na mesa ao aluno)”.*
> *Aluno: “Um”.*
> *Professora: “Ok, um. Mas se a unidade de referência é a barra laranja, quanto essa barra bege é dela?”*
> *Aluno: “Um”.*
> *Professora: “Um o que? Um de quantas?”*
> *Aluno: “Um de dez”.*
> *Professora: “E como falamos isso em fração?”*
> *Aluno: “Um décimo”.*

Por conseguinte, a professora pesquisadora continuou a fazer perguntas que não estavam no questionário, mas que davam sequência à conversa, como forma de observar se o aluno havia compreendido. Um exemplo registrado foi este:

> *Professora: "Ótimo, está correto. E se eu pegar essas três pecinhas beges, quanto elas seriam em relação à laranja?"*
> *Aluno: "Três décimos."*

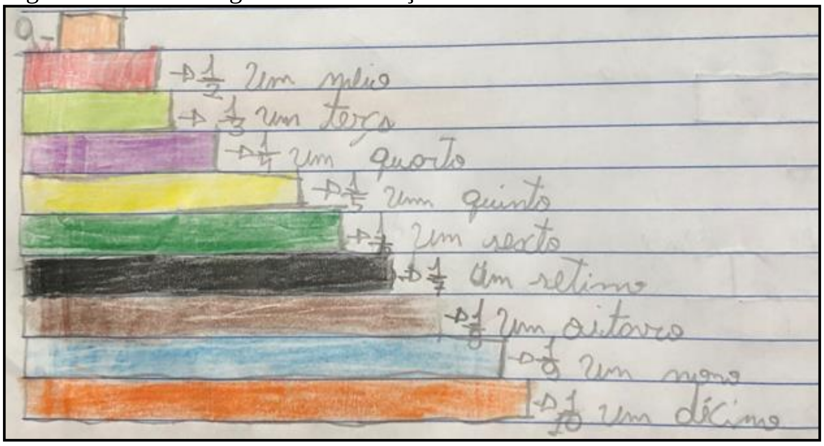
Da mesma maneira, a docente foi orientando as duplas em que a turma estava dividida. Outra evidência registrada no diário de bordo foi no dia seguinte, no décimo quinto encontro, em que os alunos demonstraram dificuldade em uma questão que envolvia $\frac{4}{5}$: "Se a barra laranja representa a unidade de referência, qual a cor da barra que representa $\frac{4}{5}$ dela?"

> Professora: "O que essa fração representa? É um inteiro dividido em quantas partes?"
> Aluno: "É um inteiro dividido em cinco partes".
> Professora: "E dessas cinco partes, quantas estão sendo consideradas?"
> Aluno: "Quatro partes".
> Professora: "Então, qual cor de peça equivale a cinco partes da peça laranja?"
> Aluno: "É a vermelha".
> Professora: "E se a fração é $\frac{4}{5}$, quantas barras precisamos analisar?"
> Aluno: "Quatro".
> Professora: "E como vamos representar isso com as barras se temos cinco?"
> Aluno: "Eliminamos uma?"
> Professora: "Exatamente, então qual cor representa $\frac{4}{5}$ da barra laranja?"
> Aluno: "A vermelha".

Com esse diálogo, os alunos começaram a compreender cada vez mais o conceito de fração. E o material de cuisenaire foi o organizador prévio comparativo, tendo em vista que, em encontros anteriores, os alunos tiveram contato com as nomenclaturas; assim, a fração equivalente pode ser bem trabalhada nessa atividade, fazendo com que o material de cuisenaire fosse a ponte cognitiva entre o que eles já conheciam e o novo, relacionando as frações com o mesmo valor.

Também ficou evidenciada a utilização da representação semiótica na atividade, tendo em vista que, em uma das questões, precisavam dizer qual fração a barra bege representava em relação a todas as outras barras do material. Conforme a Figura 38 a seguir, os alunos relacionaram o desenho geométrico juntamente a fração numérica.

Figura 38 - Desenho geométrico e frações – Cuisenaire

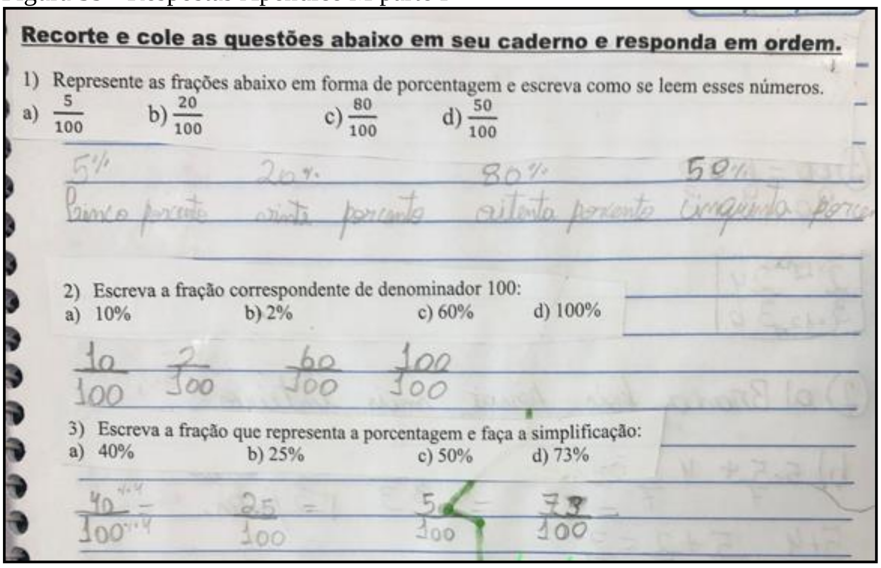


Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

A maioria dos alunos demonstrou compreender a atividade proposta, bem como responder as questões e relacionar os blocos do Cuisenaire. Nos casos em que houve dúvidas, eles eram orientados a usar o material para relacionar os tamanhos das peças.

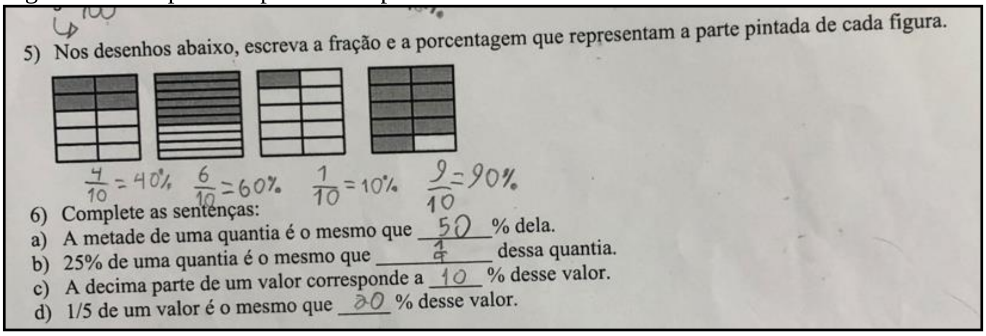
Outras evidências da utilização de organizadores prévios ocorreram nas primeiras aulas de cada conceito, a exemplo do encontro após a introdução da porcentagem e a sua relação com as frações, mais especificamente as atividades constantes no Apêndice M. Segundo os registros da professora pesquisadora e como demonstram as Figuras 39 e 40 a seguir, os participantes conseguiram facilmente relacionar a fração – conceito trabalhado em aulas anteriores – com a porcentagem – nova temática abordada. Apesar de já terem conhecimentos prévios sobre a porcentagem, não haviam feito ligações com a porcentagem, ou ainda não sabiam que ambas essas representações estavam relacionadas.

Figura 39 - Respostas Apêndice M parte I



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Figura 40 - Respostas Apêndice M parte II



5) Nos desenhos abaixo, escreva a fração e a porcentagem que representam a parte pintada de cada figura.

$\frac{4}{10}$ = 40% $\frac{6}{10}$ = 60% $\frac{1}{10}$ = 10% $\frac{9}{10}$ = 90%

6) Complete as sentenças:

a) A metade de uma quantia é o mesmo que 50 % dela.

b) 25% de uma quantia é o mesmo que $\frac{1}{4}$ dessa quantia.

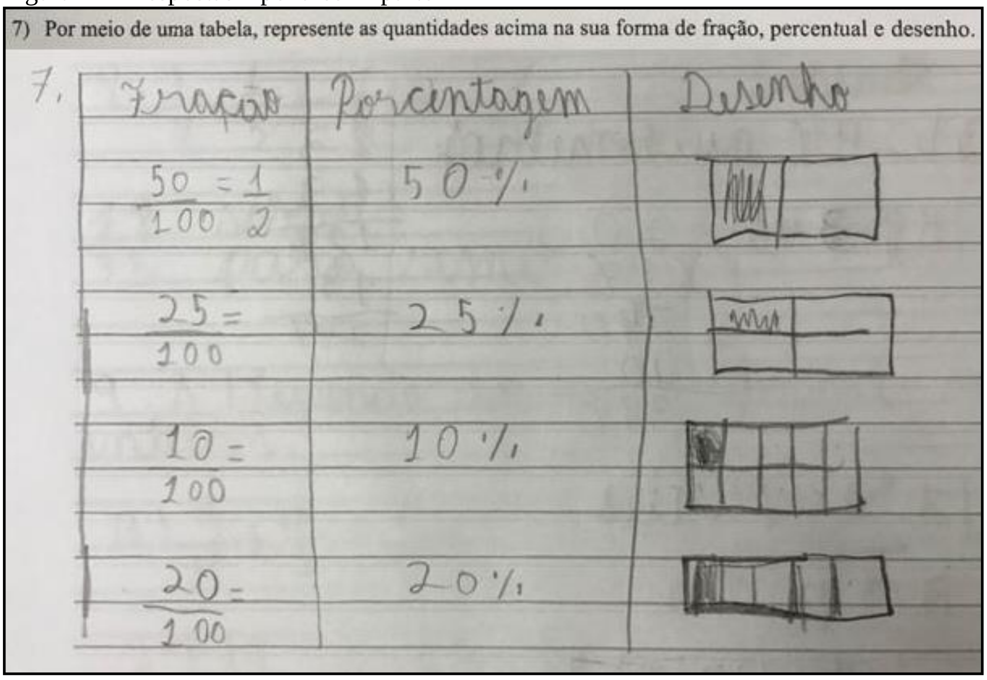
c) A decima parte de um valor corresponde a 10 % desse valor.

d) 1/5 de um valor é o mesmo que 20 % desse valor.

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Nessa outra questão, do mesmo Apêndice, os alunos, além de relacionar as frações com a porcentagem, efetuaram a representação geométrica dessas quantidades, representando o mesmo valor de três formas diferentes e explorando as representações semióticas dos números racionais (Figura 41). Eles também conseguiram efetuar a equivalência no desenho, visto que desenharam a fração irredutível e não a de denominador 100.

Figura 41 - Respostas Apêndice M parte III



7) Por meio de uma tabela, represente as quantidades acima na sua forma de fração, percentual e desenho.

7.

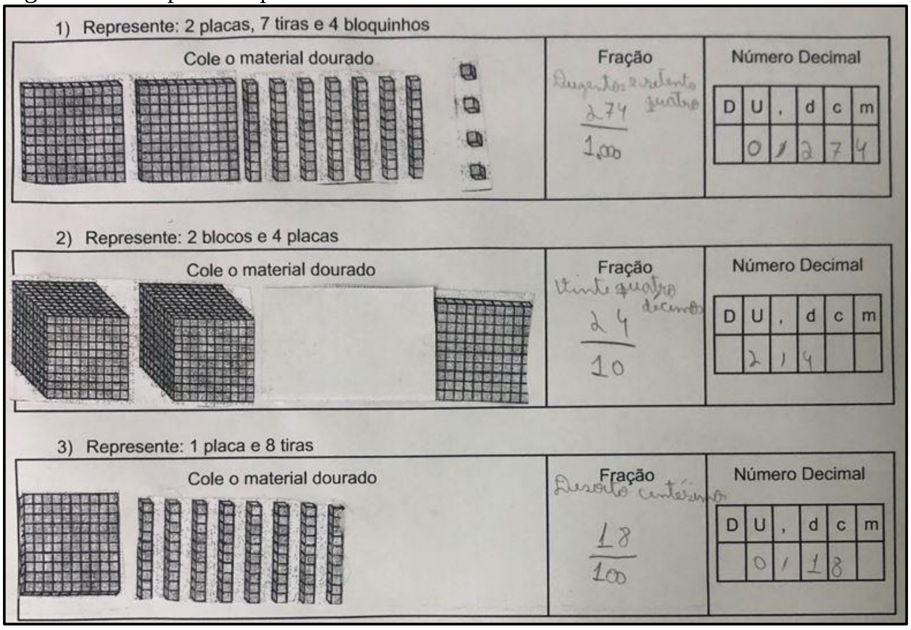
Fração	Porcentagem	Desenho
$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	50%	
$\frac{25}{100} =$	25%	
$\frac{10}{100} =$	10%	
$\frac{20}{100} =$	20%	

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Sob a mesma perspectiva, após a introdução dos números decimais, a resolução das atividades do Apêndice P serviram como organizador prévio ao ancorar os conhecimentos construídos sobre frações e os conceitos que estavam sendo construídos sobre os números decimais. Da mesma forma que descrito anteriormente, os alunos conheciam o que eram números decimais e o que eram as frações, porém, faltava a ligação entre essas informações; assim, as atividades do Apêndice P favoreceram para que essa conexão acontecesse.

A Figura 42 a seguir representa uma parte das respostas desse Apêndice, em que os participantes conseguiram efetuar essa relação e incluir também a representação do material dourado, que, nesse caso, substituiu o desenho geométrico.

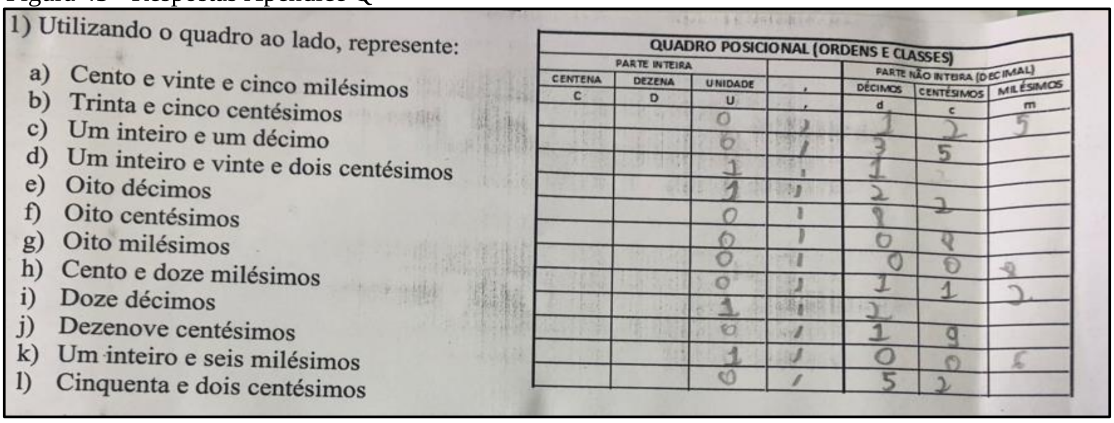
Figura 42 - Respostas Apêndice P



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

No Apêndice Q, também houve ligações entre o que já era conhecido e o novo. A partir da leitura dos números, os participantes conseguiram efetuar a localização no quadro posicional que agora ampliou as ordens para a direita. A Figura 43 ilustra essa atividade.

Figura 43 - Respostas Apêndice Q



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Dado o exposto e segundo Moreira (2016, p. 13-14),

> A principal função dos organizadores prévios é, então, a de preencher a lacuna entre o que o aluno já sabe e o que ele precisa saber, a fim de que o novo conhecimento possa ser aprendido de forma significativa. Fazem isso provendo uma moldura ideacional para a incorporação estável e a retenção do material mais detalhado e diferenciado que vem após, i.e., daquilo que deve ser aprendido, bem como aumentando a discriminabilidade, entre esse material e outro similar, ou ostensivamente conflitante, já incorporado à estrutura cognitiva.

A análise revelou que tais atividades desempenharam o papel de organizadores prévios, estabelecendo conexões cognitivas entre os conhecimentos prévios do aprendiz e os novos conhecimentos. Isso proporcionou um ambiente favorável para a construção de uma aprendizagem significativa, promovendo uma integração mais profunda dos conceitos.

É relevante destacar que algumas atividades, apesar de serem organizadores prévios, também auxiliaram nos processos de diferenciação progressiva e reconciliação integradora, uma vez que as atividades foram elaboradas com viés de serem um material potencialmente significativo.

5.3 Diferenciação progressiva e reconciliação integradora

Para que a aprendizagem seja concretizada de forma organizada e hierárquica na estrutura cognitiva do aprendiz, Moreira (2012) relata que é necessário ocorrer dois processos: a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. De acordo com o autor, “quando aprendemos de maneira significativa temos que progressivamente diferenciar significados dos novos conhecimentos adquiridos a fim de perceber diferenças entre eles, mas é preciso também proceder a reconciliação integradora” (Moreira, 2012, p. 7).

A fim de que esses dois processos se estabeleçam na estrutura cognitiva do aprendiz é fundamental que os estudantes consigam diferenciar os conceitos e seus significados e, posteriormente, integrar essas informações excluindo as diferenças conceituais. Nesse sentido, esta categoria visa analisar se os participantes foram capazes de diferenciar progressivamente os conceitos de fração, porcentagem e número decimal, bem como identificar se houve a reconciliação integradora, ou seja, se compreenderam que, apesar dos conceitos serem diferentes, eles podem representar a mesma quantidade, relacionando ainda a representação geométrica, explorando as representações semióticas envolvidas.

Conforme o diário de bordo da professora pesquisadora do dia 13/06, transcrito a seguir, alguns indícios da ocorrência da diferenciação progressiva ocorreram no décimo encontro, ao ser contextualizado o conceito e a nomenclatura das frações.

> Inicialmente foi questionado aos alunos o que era uma fração. Surgiram termos como “dividir coisas”. A partir das falas dos alunos, a professora pesquisadora perguntou o que precisava ter nessa divisão, o que era essencial. Nesse momento, um aluno disse que era preciso dividir em partes iguais. Dessa forma, a professora explicou que, a fração não é um bolo ou uma pizza, mas sim, a representação de uma parte de alguma coisa, como um pedaço do bolo inteiro ou uma fatia da pizza inteira, e que sempre está ligada ao inteiro (Diário de bordo, registro dia 13/06/2023).

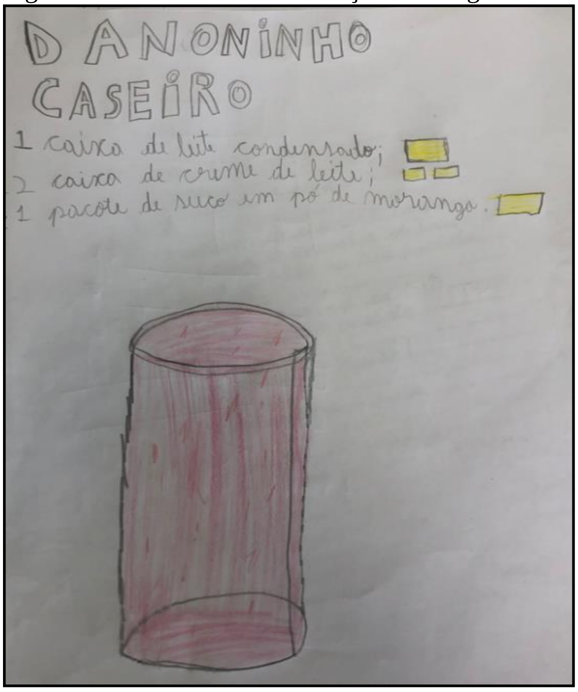
Posteriormente, foram explicados o que o numerador e o denominador representam, realizando alguns exemplos numéricos com a representação geométrica ao lado, explorando as representações semióticas. No encontro subsequente, a fração foi trabalhada como situação-problema, para que os participantes deixassem de ver a fração apenas como um desenho, mas pela possibilidade de representar quantidades de quaisquer coisas, de modo que o conceito ficasse bem contextualizado e progressivamente diferenciado.

Outra evidência percebida foi no vigésimo quinto encontro, ao trabalhar frações na reta numérica, pois após os alunos compreenderem o conceito de fração, continuaram a enriquecer os subsunçores através das atividades trabalhadas. Nesse encontro, a professora pesquisadora trabalhou com um material, conforme a descrição da seção 3.3. Essa atividade buscou mostrar também que uma fração pode representar quantidades inteiras quando o numerador e o denominador são iguais. Todavia, no final desse encontro, foi concluída uma atividade alinhada ao vigésimo terceiro encontro, a qual consistia em levar para a aula uma receita que tivesse representações fracionárias nos ingredientes e desenhar essa quantidade. No dia marcado para a entrega da tarefa, um aluno não realizou a atividade conforme solicitado, gerando o seguinte diálogo, conforme diário de bordo do dia 02/08/2023:

> Aluno: Profe, eu fiz uma receita caseira de Danoninho.
> Professora: Sério?! Que legal, pode me entregar.
> Aluno: Sim, foi meu pai que me ajudou.
> Professora: Muito bom, mas essa receita não possui frações nos ingredientes. Você pode refazer e entregar amanhã.
> Aluno: Não profe, é que são números inteiros.

Percebeu-se, pelo diálogo, que o aluno conseguiu compreender o conceito de fração e continuar ampliando o seu conhecimento através das aulas, percebendo que as quantidades eram inteiras na sua receita e, mesmo assim, poderia seriam ser representadas por frações. O trabalho do aluno pode ser observado na Figura 44 a seguir.

Figura 44 - Receita contendo frações nos ingredientes



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Além de representar as frações como quantidades inteiras, o estudante ainda fez a representação geométrica da forma correta: um inteiro considerando o seu todo. Após o diálogo citado anteriormente, a professora pesquisadora orientou que, ao lado, no número inteiro, o aluno escrevesse a fração que representava aquela quantidade.

De modo similar, a diferenciação progressiva também ocorreu na conceitualização da porcentagem, ocorrida no trigésimo segundo encontro.

> No quadro, foi colocado um exemplo de uma calça que custava R$120,00, sendo solicitado aos alunos o que queria dizer um desconto de 50%. Alguns alunos disseram que era 60 e outros que era a metade. Assim, a professora questionou como se escrevia metade utilizando a fração e prontamente a turma disse que era $\frac{1}{2}$. Na sequência os alunos foram questionados se 50% era o mesmo que $\frac{1}{2}$ e novamente a turma muito participativa, confirmou que era a mesma coisa. Dessa forma, a professora questionou se $\frac{100}{100}$ era a mesma coisa que dizer 100% e se isso representava o todo e, os alunos confirmam. Ao serem questionados quem era o todo nesse exemplo, alguns alunos relataram que era os 120 que custava a calça (Diário de bordo, registro dia 15/08/2023).

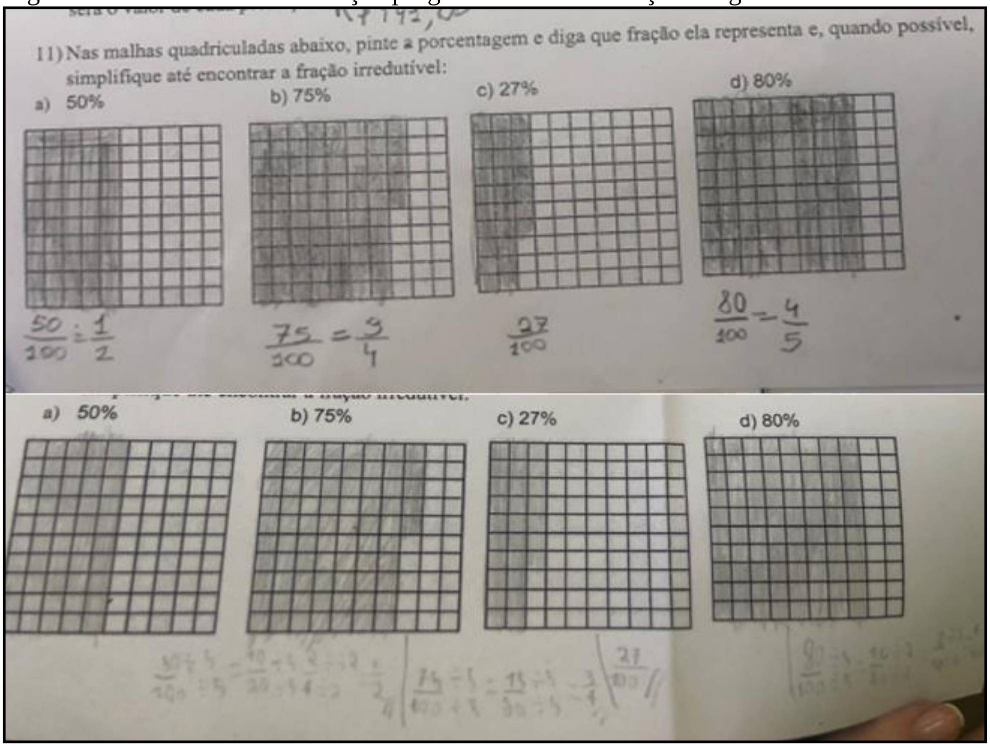
Na sequência a esse exemplo, a professora iniciou um diálogo com a turma a partir da observação da bateria do celular. Esta foi a conversação:

Professora: O que significa a bateria do celular estar em 75%?
Aluno: Que está baixando.
Professora: E o que é quando ela está cheia, totalmente carregada?
Aluno: 100%.
Professora: Então, 75% é mais ou menos que um inteiro?
Aluno: É menos.
Professora: Então, podemos dizer que 75% é o mesmo que $\frac{75}{100}$. Vamos simplificar, podemos dividir por qual valor?
Aluno: Por cinco, que vai ficar $\frac{15}{20}$, que dá pra dividir por 5 de novo que dá $\frac{3}{4}$.
Professora: E se é a mesma coisa, se $\frac{75}{100}$ é o mesmo que $\frac{3}{4}$, para representar em desenho, é necessário desenhar um inteiro, dividir em 100 partes e considerar 75, ou podemos fazer um inteiro dividido em 4 partes e considerar 3?
Aluno: Podemos?

Nesse momento a professora explicou: se as frações são equivalentes, os desenhos também são. Assim, foi feita a contextualização da porcentagem. Observou-se que, além da diferenciação progressiva, que proporcionou a evolução na construção do conhecimento na estrutura cognitiva do aprendiz, os alunos conseguiram visualizar a representação semiótica ao relacionar a fração, a porcentagem e o desenho geométrico.

Nesse encontro, também começou o processo da reconciliação integradora (Figura 45), pois os alunos compreenderam o que é a fração e o que é a porcentagem. Entenderam, porém, que podem ser diferentes e representar uma mesma quantidade, excluindo as diferenças conceituais existentes.

Figura 45 - Atividade diferenciação progressiva e reconciliação integradora



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

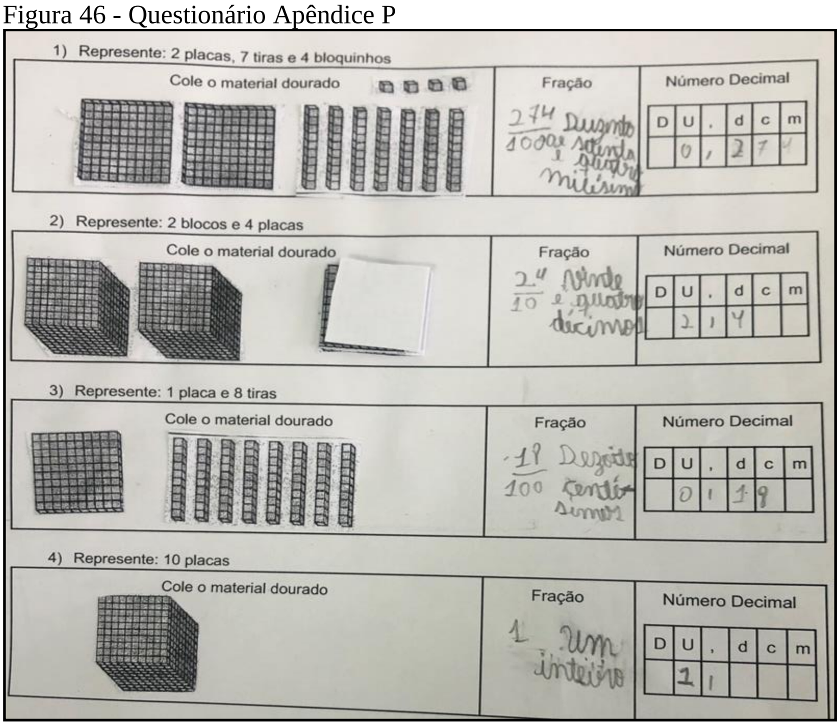
Mais indícios ocorreram no trigésimo sétimo encontro, ao ser iniciado o estudo dos números decimais, no questionário realizado em dois encontros posteriores em que se trabalhava com o material dourado para relacionar o bloco com a unidade, a placa com o décimo, a tira com o centésimo e o quadradinho com o milésimo. No dia 30 de agosto de 2023, a professora pesquisadora registrou:

> Na correção do Apêndice P, a maioria dos alunos compreendeu a tarefa, mas alguns não associaram que 20 placas equivaliam o mesmo que dois blocos. Outra dificuldade surgiu na questão 4, pois um aluno não compreendeu o porquê de as 10 placas estarem na casa da unidade e não no décimo, então foi explicado que é a mesma coisa que as 10 unidades que foram uma dezena (Diário de bordo, registro dia 30/08/2023).

Ao conceitualizar o número decimal para que fosse diferenciado progressivamente, foram trabalhadas também as transformações decimais através da leitura e da regra. Conforme o diário de bordo do mesmo dia, os alunos acharam mais fácil a transformação pela leitura, uma vez que o quadro posicional era mais familiar, efetuando a leitura do número e pronunciando a ordem posicional.

Durante a atividade do Apêndice P, os participantes também estavam utilizando a representação semiótica. Eles apenas substituíram o desenho geométrico pela colagem do material, relacionando, além disso, o número decimal à fração, ocorrendo a reconciliação integradora. Isso se demonstra na Figura 46 a seguir.

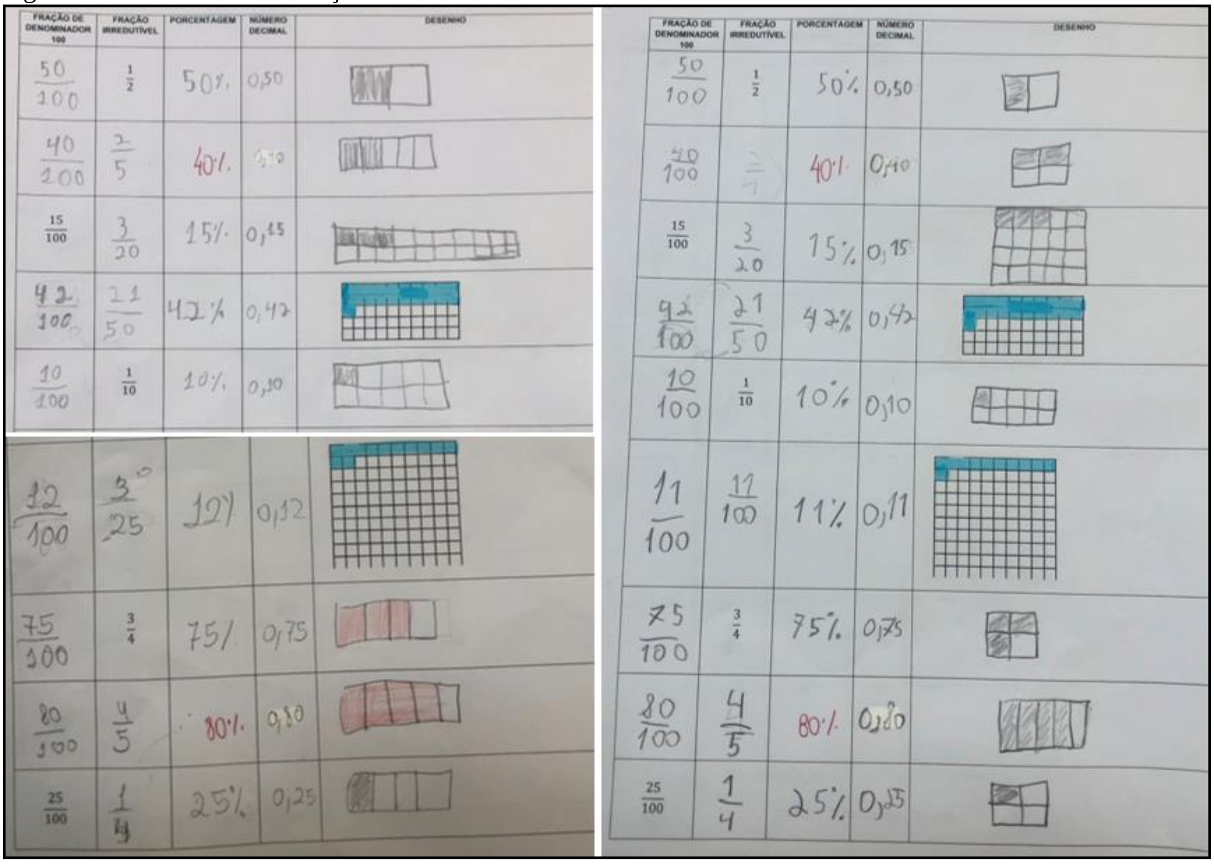
Figura 46 - Questionário Apêndice P



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Em uma das atividades de transição, também ficou evidenciada a representação semiótica, diferenciação progressiva e reconciliação integradora, devido ao fato de os alunos compreenderem como são cada uma das representações. Conseguiram, portanto, transitar de uma representação para outra, compreendendo que, mesmo diferentes, representam a mesma coisa, conforme demonstra a Figura 47.

Figura 47 - Atividade de transição



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Diante da análise realizada nesta categoria, pode-se concluir que os participantes conseguiram compreender cada conceito de forma separada, diferenciando progressivamente e, a partir da transição entre as representações semióticas, ocorreu o processo da reconciliação integradora. Nesse sentido, Moreira descreve:

> Assim como a aprendizagem significativa pode ser ora subordinada ora superordenada (ou combinatória), a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa são processos dinâmicos que ocorrem no curso de aquisição de significados. A estrutura cognitiva caracteriza-se, portanto, por uma dinamicidade que leva a uma organização do conteúdo aprendido. Segundo Ausubel, a organização do conteúdo cognitivo, em uma determinada área do conhecimento, na mente de um indivíduo tende a uma estrutura hierárquica na qual as ideias mais inclusivas situam-se no topo desta estrutura e, progressivamente, abrangem proposições, conceitos e dados factuais menos inclusivos e mais diferenciados (Moreira, 2016, p. 24-25).

Percebeu-se, assim, que as atividades desenvolvidas ao longo da aplicação da sequência didática foram organizadas de maneira hierárquica, fortalecendo progressivamente a estrutura cognitiva do aprendiz. Esse arranjo favoreceu o enriquecimento dos subsunçores capacitando-os a ancorar novas informações.

A diferenciação progressiva e reconciliação integradora também ocorreram na aplicação em novos conceitos, que serão relatados no item 5.5.

5.4 Predisposição do aluno em aprender

Para que a aprendizagem significativa se suceda é fundamental que o material seja potencialmente significativo e que haja uma predisposição do aprendiz. Segundo Moreira (2016, p. 62), "Para aprender significativamente, o aluno tem que manifestar uma disposição para relacionar, de maneira não-arbitrária e não-literal (substantiva), à sua estrutura cognitiva, os significados que capta a respeito dos materiais educativos, potencialmente significativos, do currículo". Em vista disso, esta categoria tem como objetivo evidenciar a ocorrência da disposição dos alunos durante a aplicação da sequência didática.

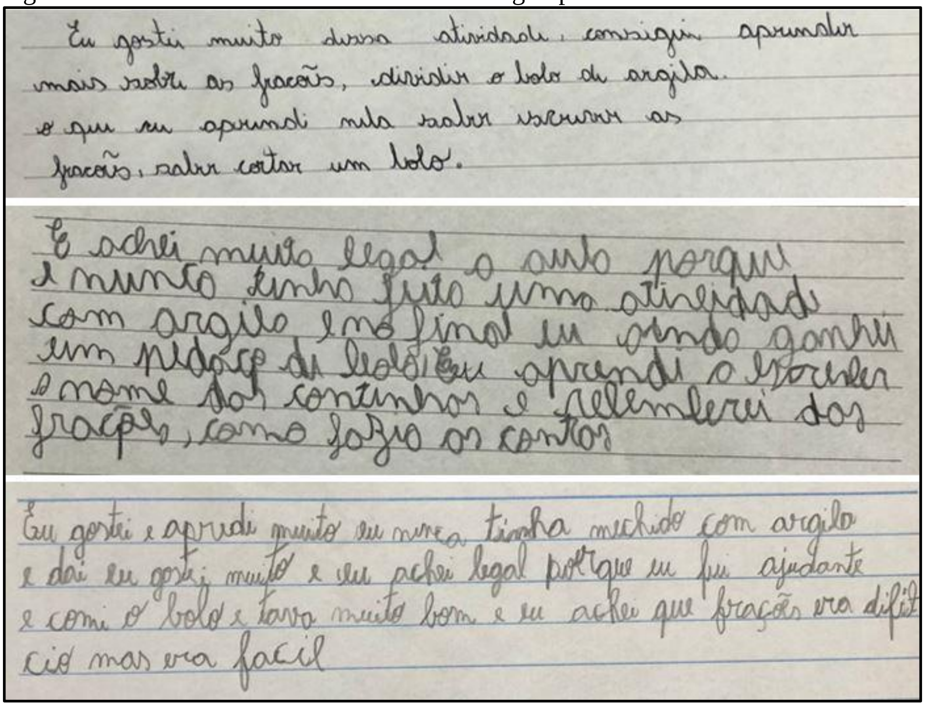
No entanto, ressalta-se que essa disposição não está vinculada à motivação; em vez disso, está relacionada à capacidade do estudante em relacionar o material de maneira substantiva e não arbitrária, ou seja, refere-se a uma abordagem fundamentada em características e sem ser realizada de maneira aleatória. Para Moreira (2016, p. 61), "se o aluno manifesta uma disposição par aprender, ele/ela também atua intencionalmente para captar o significado dos materiais educativos".

Durante a aplicação da sequência didática, evidenciaram-se algumas situações em que os participantes demonstraram interesse e vontade de aprender sobre o assunto abordado. Em alguns casos, efetuaram-se relatos posteriores às atividades e, em outros, observaram-se os questionamentos realizados durante os encontros. O interesse mencionado também se percebeu na forma como os alunos escreveram os relatos.

Os relatos dos alunos foram baseados a partir do método conhecido como *the one-minute paper*, que tem como propósito a breve elaboração de uma descrição sobre a percepção e/ou experiência sobre a aula. Ressalta-se que, para Cuseo *et al.* (2016, p. 46), **"Students receive full credit (usually five points) for the minute paper, no matter what they write, because the question does not ask for correct or incorrect answers; instead, it solicits their personal perceptions and experiences",** ou seja, não existem respostas certas ou erradas, pois o importante é que o participante relate a sua visão, a sua experiência pessoal. Além disso, por tratar-se de relatos em poucos minutos, as perguntas devem ser de fácil compreensão.

Um dos primeiros relatos que a professora pesquisadora solicitou aos alunos ocorreu após a execução da dinâmica do bolinho de argila. Esses relatos proporcionaram formas de analisar os apontamentos dos alunos. A Figura 48 a seguir demonstra que os alunos relembraram e/ou aprenderam sobre as frações.

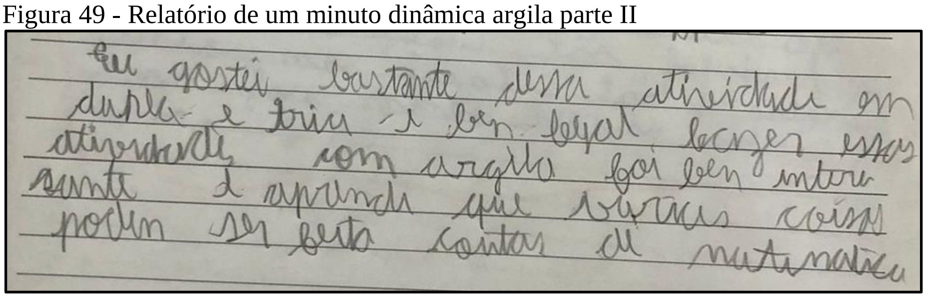
Figura 48 - Relatório de um minuto dinâmica argila parte I



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Outros alunos também destacaram que gostaram de trabalhar com a argila, tendo em vista que a maioria da turma não conhecia esse material. A aplicação do conteúdo com a realidade também chamou a atenção dos alunos, conforme demonstra a Figura 49 a seguir.

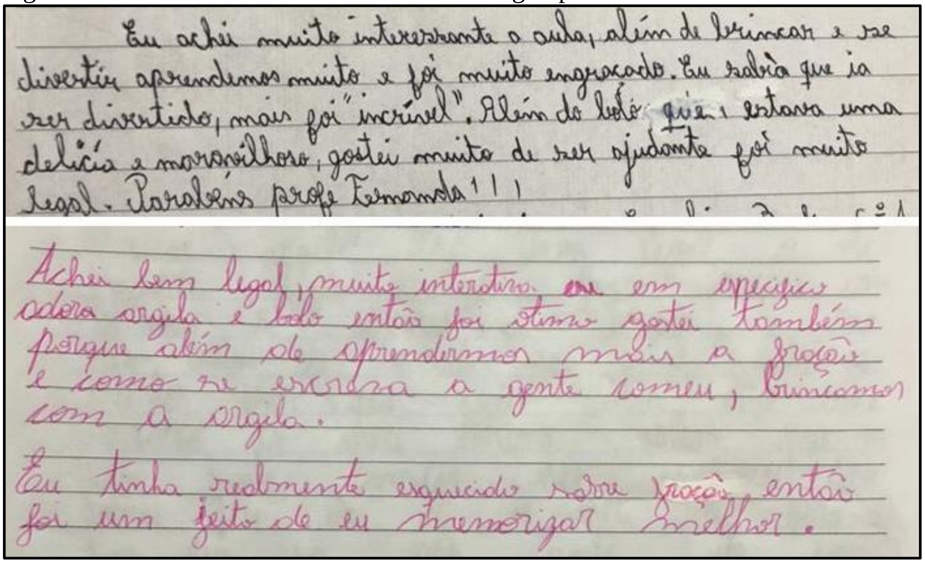
Figura 49 - Relatório de um minuto dinâmica argila parte II



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Além disso, relataram que a dinâmica foi muito divertida, ou seja, estavam aprendendo enquanto faziam algo prazeroso, conforme consta nos registros apresentados na Figura 50.

Figura 50 - Relatório de um minuto dinâmica argila parte III



Eu achei muito interessante a aula, além de brincar e se divertir aprendemos muito e foi muito engraçado. Eu sabia que ia ser divertido, mais foi "incrível". Além do bolo que estava uma delícia e maravilhoso, gostei muito de ser ajudante foi muito legal. Parabéns profe Fernanda!!!

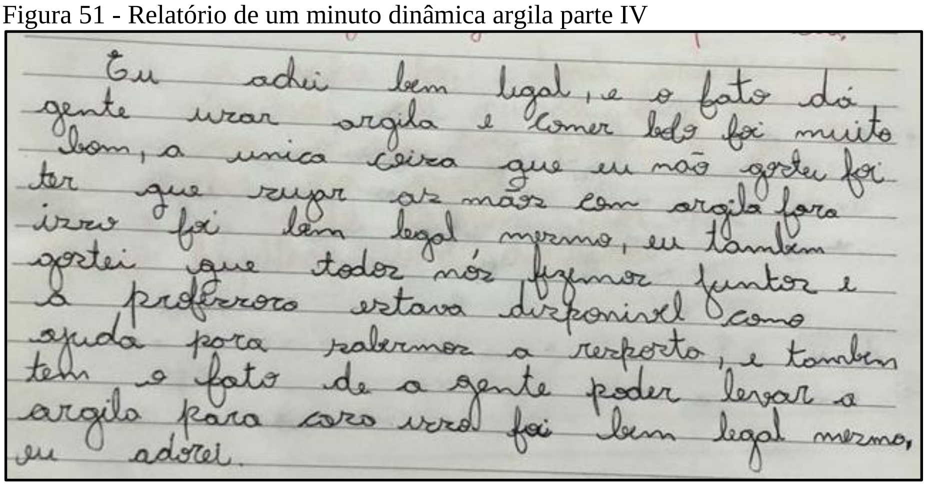
Achei bem legal, muito interativo em especifico adoro argila e bolo então foi ótimo gostei também porque além de aprendermos mais a fração e como se escreva a gente comeu, brincamos com a argila.

Eu tinha realmente esquecido sobre fração então foi um jeito de eu memorizar melhor.

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Nos dois relatos a seguir, os alunos enfatizaram o fato de a explicação da professora ter sido de forma clara e sua disponibilidade em sanar as dúvidas no decorrer do desenvolvimento da atividade. Além disso (Figuras 51, 52 e 53), mencionam uma atividade de aulas anteriores – atividade dos barbantes –, utilizada para introduzir a história dos números racionais.

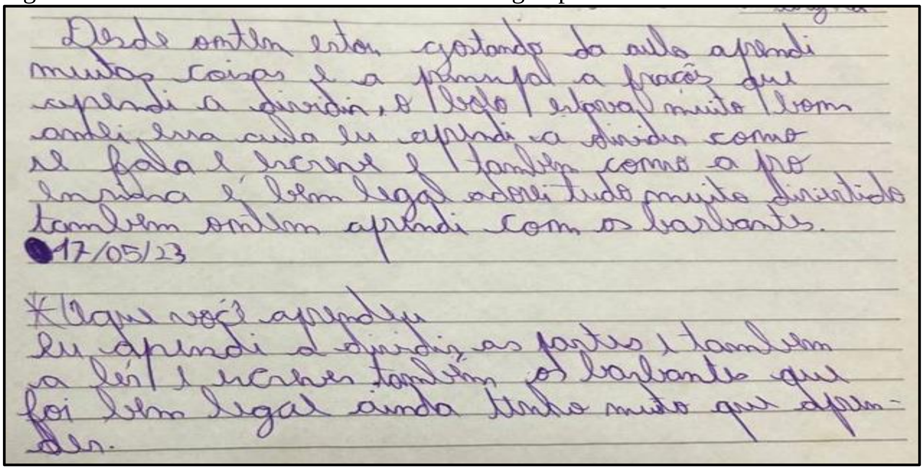
Figura 51 - Relatório de um minuto dinâmica argila parte IV



Eu achei bem legal, e o fato da gente usar argila e comer bolo foi muito bom, a unica coisa que eu não gostei foi ter que sujar as mãos com argila fora isso foi bem legal mesmo, eu também gostei que todos nós fizemos juntos e a professora estava disponivel como ajuda para sabermos a resposta, e tambem tem o fato de a gente poder levar a argila para casa isso foi bem legal mesmo, eu adorei.

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Figura 52 - Relatório de um minuto dinâmica argila parte V

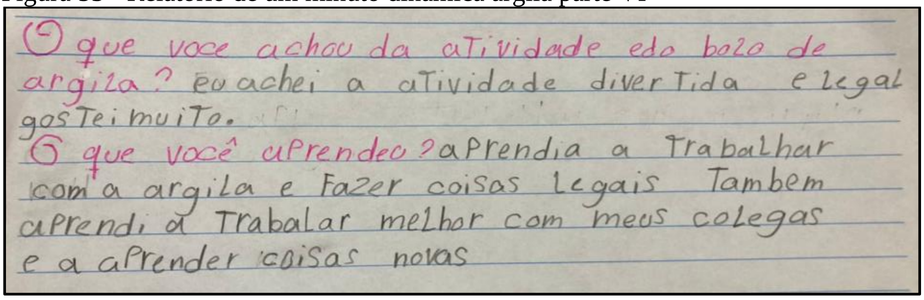

Desde ontem estou gostando da aula aprendi muitas coisas e a principal a frações que aprendi a dividir, o lego [illegible] muito bom ontem era aula eu aprendi a dividir como se fala e escreve e também como a pro [illegible] é bem legal adorei tudo muito divertido também ontem aprendi com os barbantes.
17/05/23

* O que você aprendeu
eu aprendi a dividir as partes e também a ler e escrever também os barbantes que foi bem legal ainda tenho muito que aprender.

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

O relato dessa aluna em especial chamou bastante atenção. A aluna é estrangeira e contou que conseguiu trabalhar em grupo a partir a atividade.

Figura 53 - Relatório de um minuto dinâmica argila parte VI


O que voce achou da aTividade edo bolo de argila? eu achei a aTividade diverTida e legal gosTei muiTo.
O que você aprendeo? aprendia a Trabalhar com a argila e Fazer coisas legais Tambem aprendi a Trabalar melhor com meus colegas e a aprender coisas novas

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Dado o exposto pelos relatos, evidenciou-se que a dinâmica, além de despertar o interesse nos alunos, proporcionou a oportunidade de trabalharem com materiais diferentes na medida em que aprendiam, contribuindo para fortalecer a integração entre os alunos dentro da sala de aula.

No vigésimo oitavo encontro, durante a realização das atividades de adição e subtração de frações, houve inícios da predisposição dos estudantes, conforme diário de bordo da professora, referente ao Apêndice K.

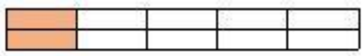
> As questões 2 e 3 foram explicadas aos alunos para que tentassem responder em casa, todavia, dois alunos, mesmo após a aula terminar e tocar o sinal para a troca de sala de aula ficaram com a professora para tentar resolver as questões no quadro. A intenção, era que a professora validasse o pensamento que eles haviam tido para resolver, e calcular na hora, já que queriam descobrir o resultado. Claramente, o cálculo demonstrado por eles estava correto, assim, saíram da sala contentes, contando aos colegas que já sabiam como fazer a tarefa e que era fácil (Diário de bordo, registro dia 08/08/2023).

Em outro momento, no trigésimo primeiro encontro, conforme o diário de bordo (14/08), ao ser trabalhado com a divisão de frações, uma aluna tentou fazer a atividade em casa, mas, em vez de realizar a tarefa como foi ensinado, ela buscou outra forma de chegar à resposta. Esse fato demonstrou que a aluna pesquisou e se empenhou para compreender e resolver a atividade. A professora pesquisadora deixou claro nesse momento que estava correto o que a aluna fez, chamado de "método da borboleta", ou seja, não há nenhum problema em realizar as atividades de forma diferente, desde que se tenha clareza nos processos que estão sendo realizados.

No encontro seguinte, ao ser trabalhado com porcentagem, após as explanações iniciais, também foi observado o interesse dos estudantes no decorrer da aula. É o que se observa no registro no diário de bordo (15/08/2023):

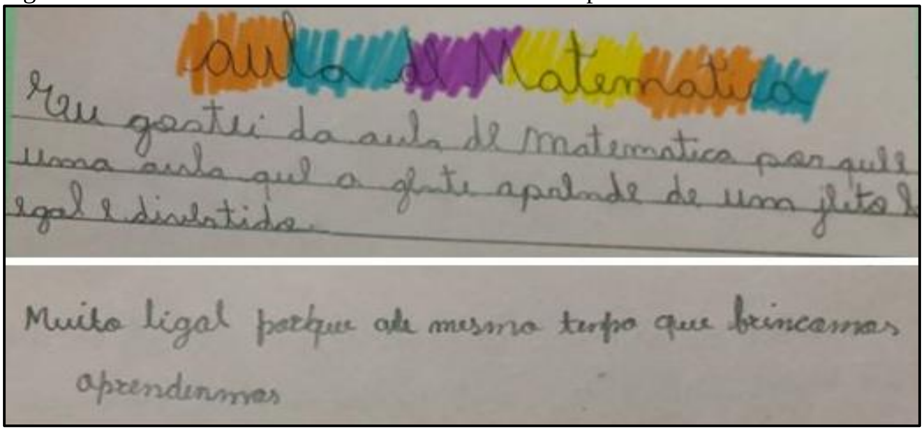
> Após o diálogo sobre o desconto de 50% no valor da calça, uma aluna questionou como que se calculava para se obter o valor de um percentual. Retornando ao exemplo da calça, a professora explicou que se o desconto da calça fosse de 75%, quer dizer que buscamos saber quanto é 75% de R$120,00. Logo, juntamente com a turma, essa porcentagem foi escrita na forma de fração para que fosse possível, através do conceito inicial da fração, chegar ao resultado, ou seja: $75\% = \frac{75}{100} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ logo, $\frac{3}{4}\ de\ 120 = 90$ (um inteiro dividido em 4 partes e consideradas 3).

Também se observou o interesse os alunos quando havia as representações geométricas dos valores. No encontro de número 36, por exemplo, em uma das questões aconteceu a seguinte conversação:

> E uma das questões, chegou-se ao seguinte resultado: $\frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%$.
> Professora: Como fica a representação desses valores utilizando o desenho?
> Alunos: Faz 5 quadradinhos e pinta 1.
> A professora imediatamente fez o desenho conforme os alunos orientaram e questionou:
> Professora: Alguém desenhou de outra forma?
> Aluno 1: Eu fiz 10 quadradinhos e pintei 2, está certo?
> Professora: A fração $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{10}$ são equivalentes?
> Aluno 1: São.
> Professora: Então os desenhos vão ser equivalentes?
> Aluno: Vão.
> Professora: Vamos conferir?
> Nesse momento, a professora toma como exemplo o desenho feito anteriormente no quadro, que representava $\mathbf{\frac{1}{5}}$ -  - e traçou uma linha horizontal dividindo esses 5 retângulos - . Assim, demonstrou ao aluno que o que ele fez também estava correto, pois os desenhos também são equivalentes. Apesar a turma já ter visto essas relações, notou-se um brilho no olhar o aluno ao perceber essa relação feita pela professora e também pelo fato de ter acertado, mesmo tendo feito de uma forma diferente (Diário de bordo, registro dia 23/08/2023).

Na última dinâmica realizada – a dos confetes – também foi aplicado o *the one-minute paper* após a finalização da atividade. Novamente, os estudantes relataram a diversão junto com a aprendizagem, conforme Figura 54 a seguir.

Figura 54 - Relatório de um minuto dinâmica confetes parte I



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Estar se divertindo e aprendendo ao mesmo tempo anima os estudantes e desperta neles o interesse em aprender cada vez mais. Outra observação importante é dar significado para a aprendizagem, trazendo elementos da realidade para que eles visualizem o que estão aprendendo, motivando-os a cada vez mais buscar conhecimento. Moreira (2016, p. 58), nesse sentido, menciona:

> O próprio Ausubel, ao explicitar as condições para a aprendizagem significativa (1968, pp. 37 e 38), de certa forma leva em consideração o lado afetivo da questão: a aprendizagem significativa requer não só que o material de aprendizagem seja potencialmente significativo (i.e., relacionável à estrutura cognitiva de maneira não-arbitrária e não-literal), mas também que o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar o novo material de modo substantivo e não-arbitrário a sua estrutura de conhecimento. Ou seja, para aprender de maneira significativa o aprendiz deve querer relacionar o novo conteúdo de maneira não-literal e não-arbitrária ao seu conhecimento prévio.

Em virtude do exposto, ficou evidenciado que os participantes demonstraram interesse no decorrer das aulas, auxiliando para que, juntamente com um material potencialmente significativo, ocorra uma aprendizagem significativa.

5.5 Aplicação em novos contextos

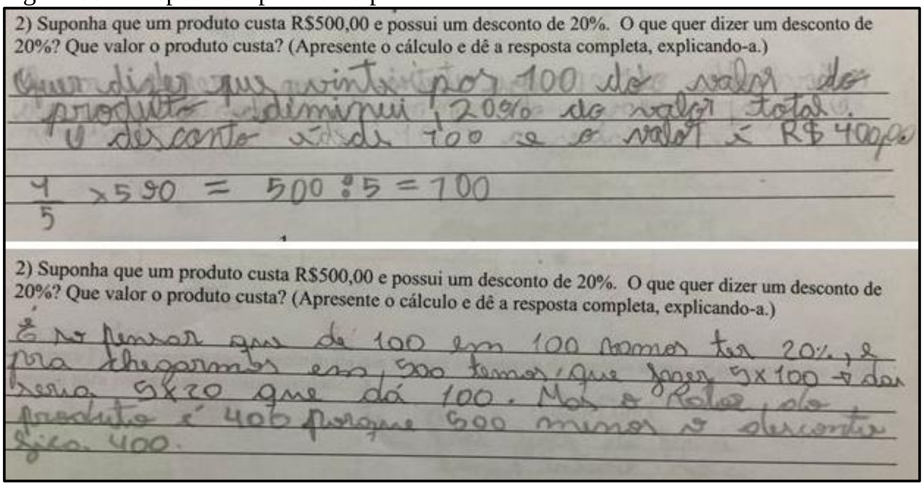
É essencial, na construção de novos conceitos, que os estudantes não apenas compreendam ideias, mas também sejam capazes de aplicar o aprendizado em contextos diferentes dos abordados em sala de aula. A análise do aprendizado do aluno requer, conforme Moreira (2016, p. 17):

> Testes de compreensão devem, no mínimo, ser escritos de maneira diferente e apresentados em um contexto, de certa forma, diferente daquele originalmente encontrado no material instrucional. Solução de problemas, sem dúvida, é um método válido e prático de se procurar evidência de aprendizagem significativa. Talvez seja, segundo Ausubel, a única maneira de avaliar, em certas situações, se os alunos, realmente, compreenderam significativamente as idéias que são capazes de verbalizar.

Diante dessa perspectiva, torna-se relevante proporcionar aos alunos experiências distintas daquelas abordadas em sala de aula afim de observar o aprendizado. Além disso, a socialização verbal e/ou diálogos dos participantes demonstram a compreensão do tema.

As análises ocorreram através de atividades entregues pelos alunos nos últimos encontros. A primeira evidência deu-se pelas atividades do Apêndice S, no qual os alunos precisavam descrever os processos realizados. A Figura 55 a seguir demonstra a explicação clara sobre a questão envolvendo o cálculo de porcentagem.

Figura 55 - Respostas Apêndice S parte I



2) Suponha que um produto custa R$500,00 e possui um desconto de 20%. O que quer dizer um desconto de 20%? Que valor o produto custa? (Apresente o cálculo e dê a resposta completa, explicando-a.)

Quer dizer que vinte por 100 do valor do produto diminui 20% do valor total. O desconto é de 100 e o valor é R$ 400,00

$\frac{4}{5} \times 500 = 500 : 5 = 100$

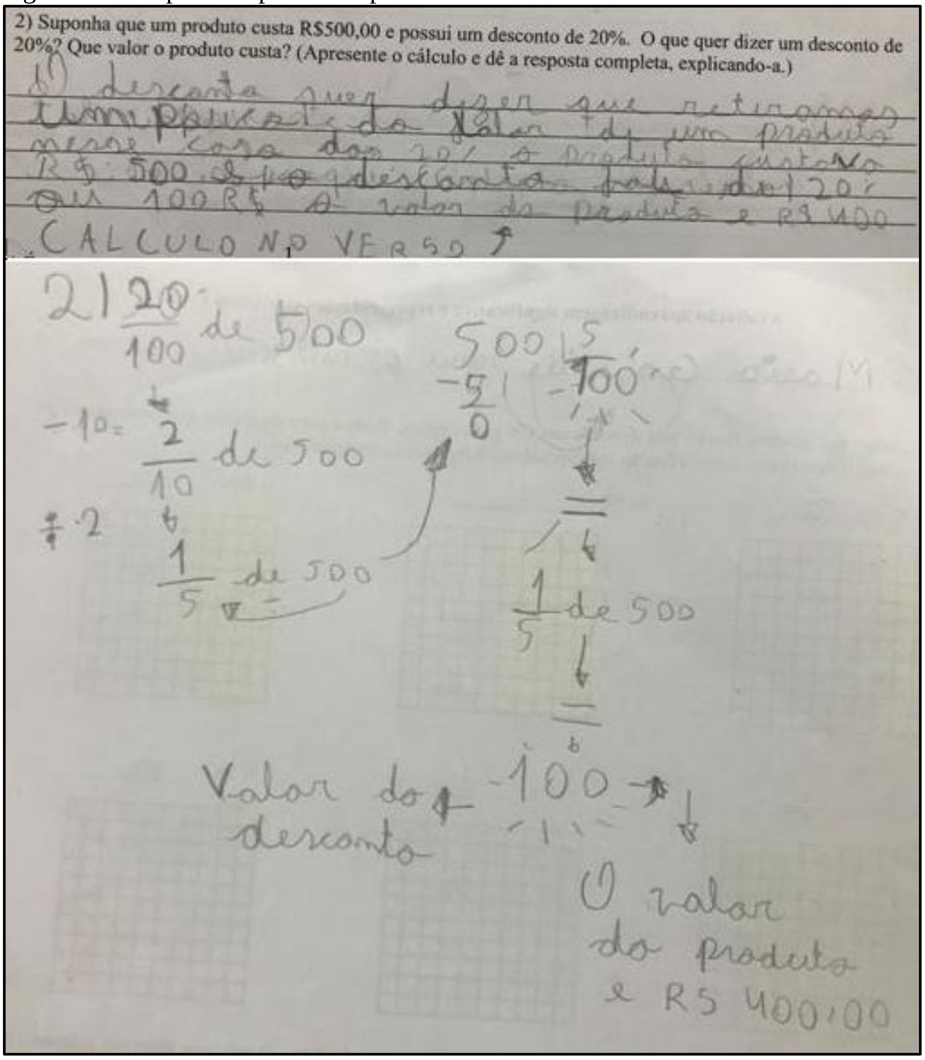
2) Suponha que um produto custa R$500,00 e possui um desconto de 20%. O que quer dizer um desconto de 20%? Que valor o produto custa? (Apresente o cálculo e dê a resposta completa, explicando-a.)

É só pensar que de 100 em 100 vamos ter 20%, e pra chegarmos em 500 temos que fazer 5x100 e daí seria 5x20 que dá 100. Mas o valor do produto é 400 porque 500 menos o desconto fica 400.

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

A descrição da aluna a seguir foi mais detalhada, como mostra a Figura 56.

Figura 56 - Respostas Apêndice S parte II

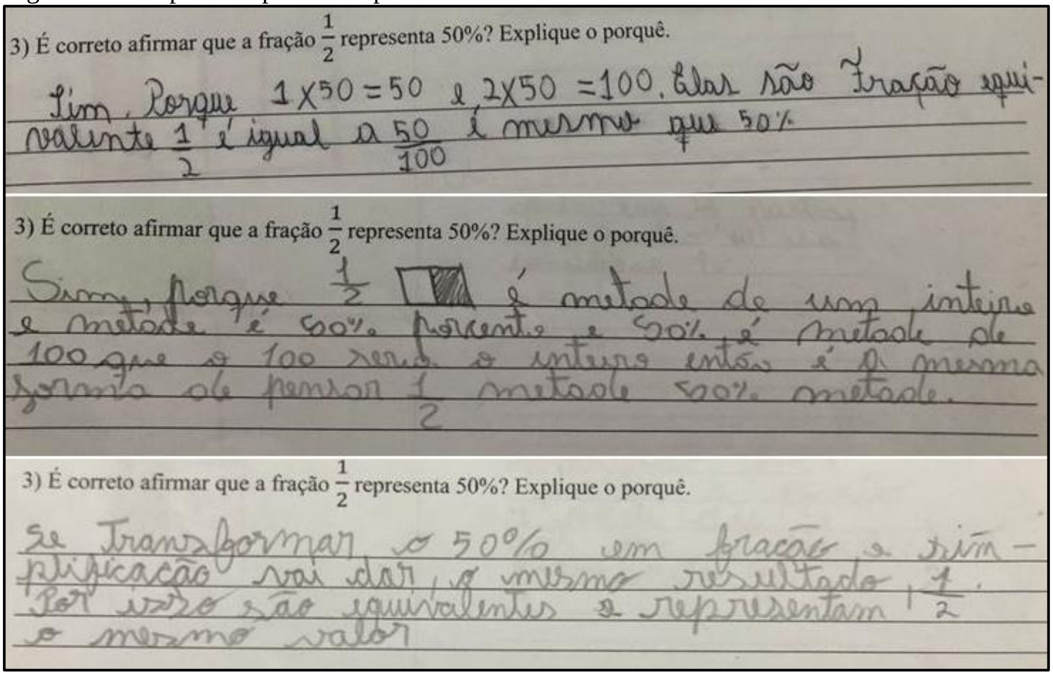


Fonte: dados da pesquisa (2023).

Com base nas descrições dos participantes, revelou-se que eles compreenderam os números racionais, visto que relacionaram a porcentagem com a fração e transitaram de um tipo de representação para outra.

A pergunta seguinte questionava se a fração $\frac{1}{2}$ representava 50%. A maioria da turma respondeu corretamente, expressando-se de formas diferentes. Na Figura 57 a seguir, pode-se perceber a compreensão dos alunos referente as transições dos números racionais.

Figura 57 - Respostas Apêndice S parte III



3) É correto afirmar que a fração $\frac{1}{2}$ representa 50%? Explique o porquê.

Sim, Porque 1x50 = 50 e 2x50 = 100. Elas são Fração equivalente $\frac{1}{2}$ é igual a $\frac{50}{100}$ é mesmo que 50%

3) É correto afirmar que a fração $\frac{1}{2}$ representa 50%? Explique o porquê.

Sim, porque $\frac{1}{2}$ é metade de um inteiro e metade é 50% porcento e 50% é metade de 100 que o 100 seria o inteiro então é a mesma forma de pensar $\frac{1}{2}$ metade 50% metade.

3) É correto afirmar que a fração $\frac{1}{2}$ representa 50%? Explique o porquê.

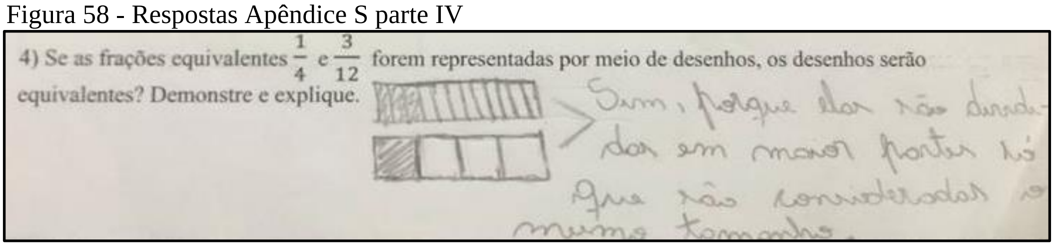
Se Transformar o 50% em fração e simplificação vai dar o mesmo resultado, $\frac{1}{2}$. Por isso são equivalentes e representam o mesmo valor

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Observou-se que, além da transição, os alunos lembraram de utilizar a representação geométrica para explicarem o raciocínio. Apesar de relatarem durante as aulas que não sabiam se expressar, as anotações foram pertinentes e compreensíveis.

Na sequência, foi questionado se ter frações equivalentes significa que os desenhos respectivos também são equivalentes. Novamente, conforme a Figura 58 a seguir, os estudantes demonstraram compreender que existe a equivalência.

Figura 58 - Respostas Apêndice S parte IV



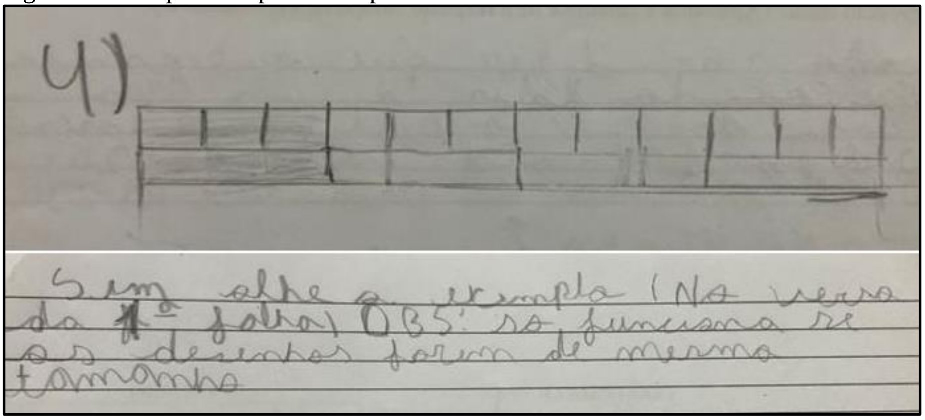
4) Se as frações equivalentes $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{12}$ forem representadas por meio de desenhos, os desenhos serão equivalentes? Demonstre e explique.

Sim, porque elas são divididas em menor partes só que são consideradas o mesmo tamanho.

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Observou-se que um aluno retomou o que foi visto em aula e explicou que, para o desenho ser equivalente, é preciso que os inteiros desenhados sejam do mesmo tamanho, pois o que muda é a forma como ele é dividido (Figura 59).

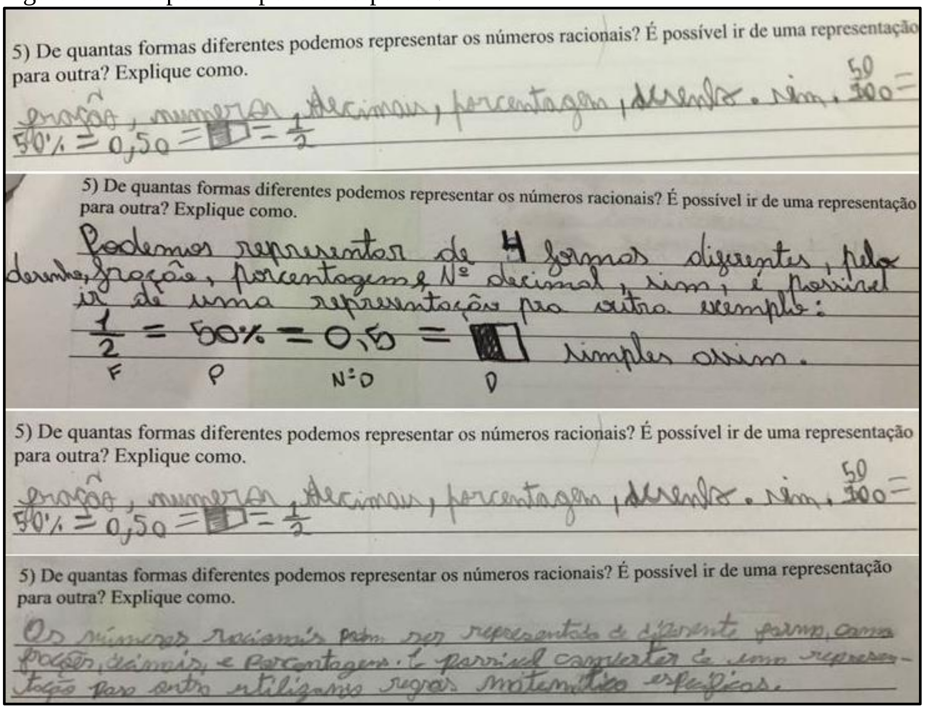
Figura 59 - Respostas Apêndice S parte IV



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Por conseguinte (Figura 60), evidenciou-se que os participantes compreenderam que os números racionais possuem mais de uma representação para escrever a mesma quantidade, conseguindo transitar de um tipo de representação para outra.

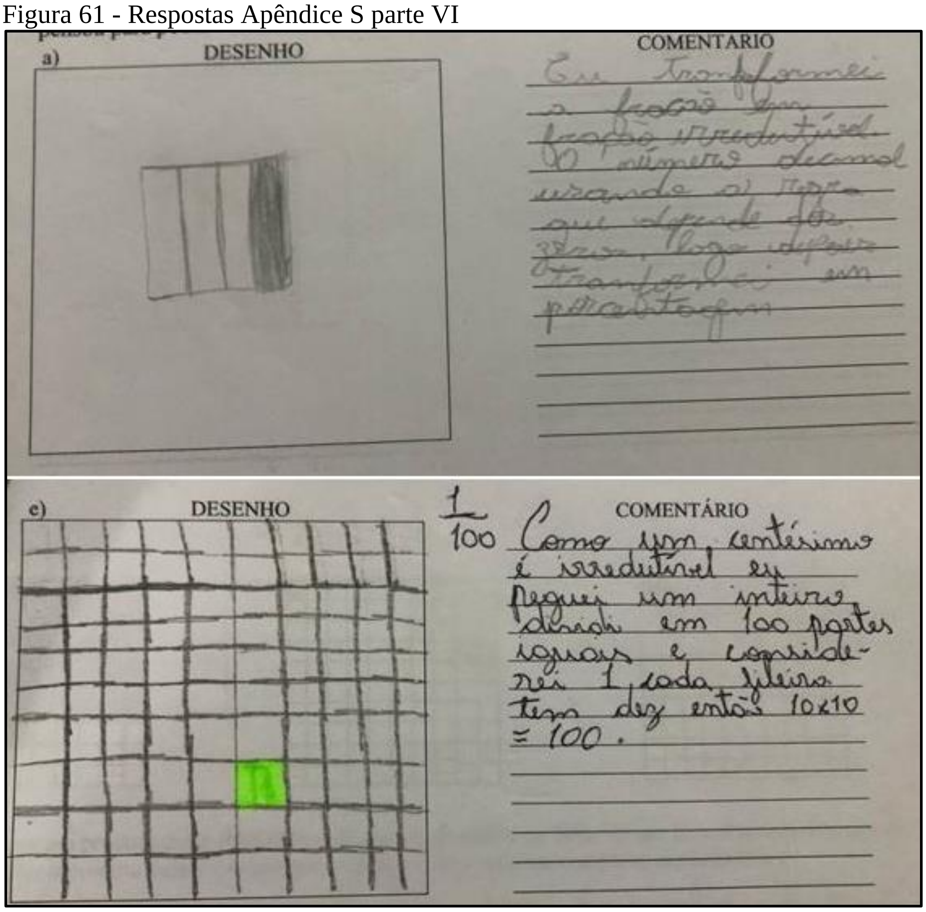
Figura 60 - Respostas Apêndice S parte V



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Finalizando essa atividade, os estudantes explicaram como efetuaram a transição de fração para porcentagem, decimal e desenho (Figura 61).

Figura 61 - Respostas Apêndice S parte VI

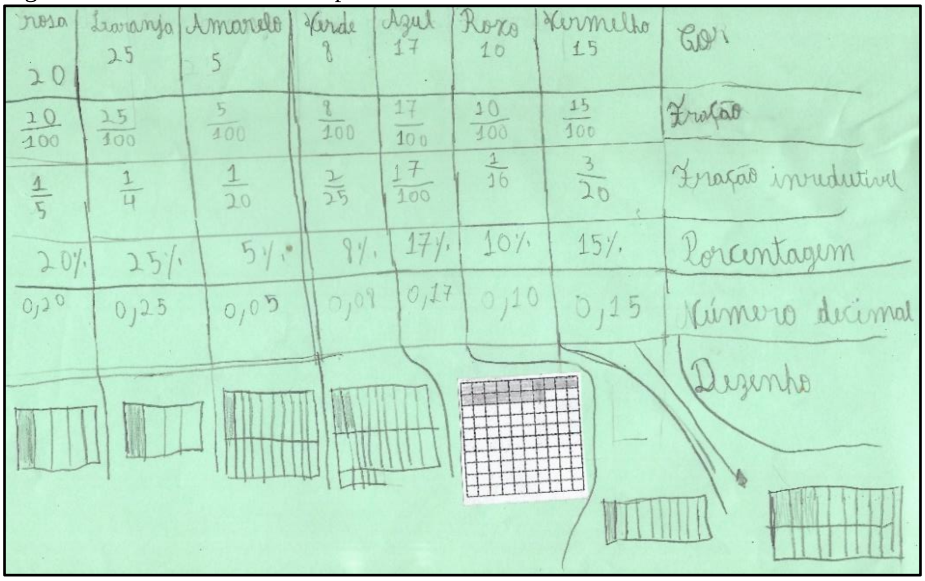


Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Posteriormente à análise das atividades, notou-se uma compreensão clara quanto ao tema abordado e, novamente, apesar da dificuldade mencionada em aula sobre se expressarem, os alunos conseguiram expor suas ideias.

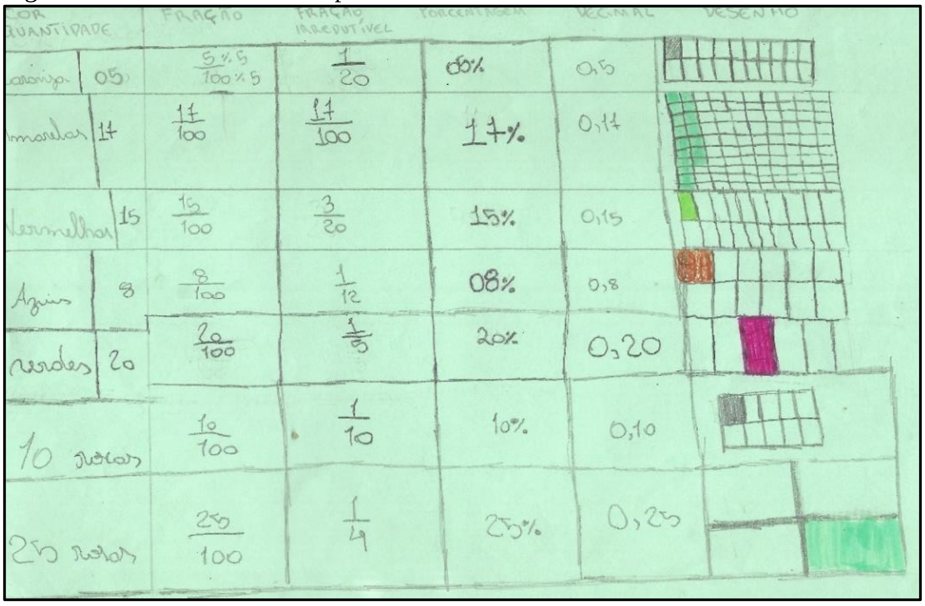
Na mesma direção, em outra atividade também foi possível identificar a aplicação da aprendizagem dos alunos em situações distintas das trabalhadas no decorrer da sequência didática, durante a dinâmica dos confetes. Para tal, era necessário efetuar a contagem dos confetes por cor e, posteriormente, construir uma tabela com as representações das devidas quantidades, explicando todas as informações a partir de uma única quantidade. A seguir, a partir das Figuras 62, 63 e 64, constam as tabelas feitas pelos alunos após a separação e contagem das cores.

Figura 62 - Atividade confetes parte I



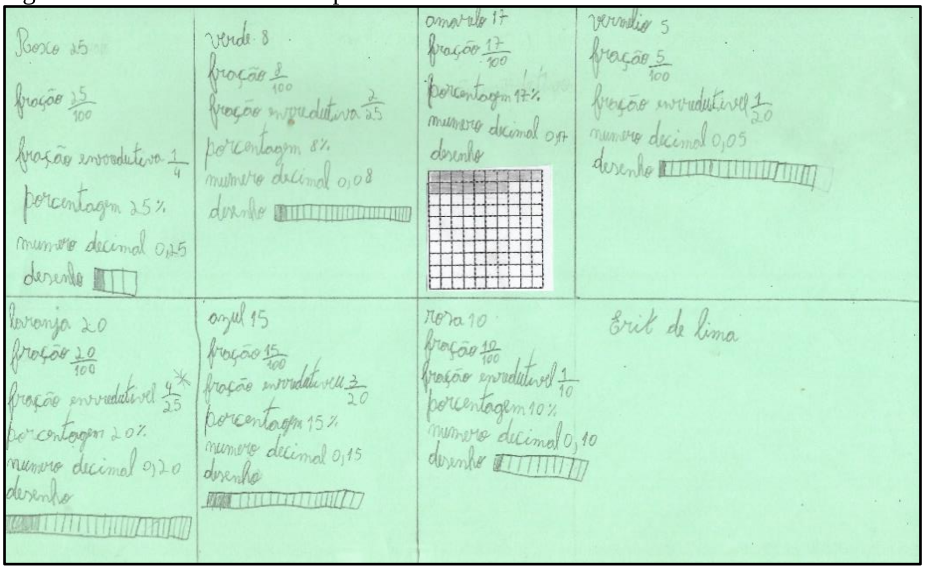
Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Figura 63 - Atividade confetes parte II



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Figura 64 - Atividade confetes parte III



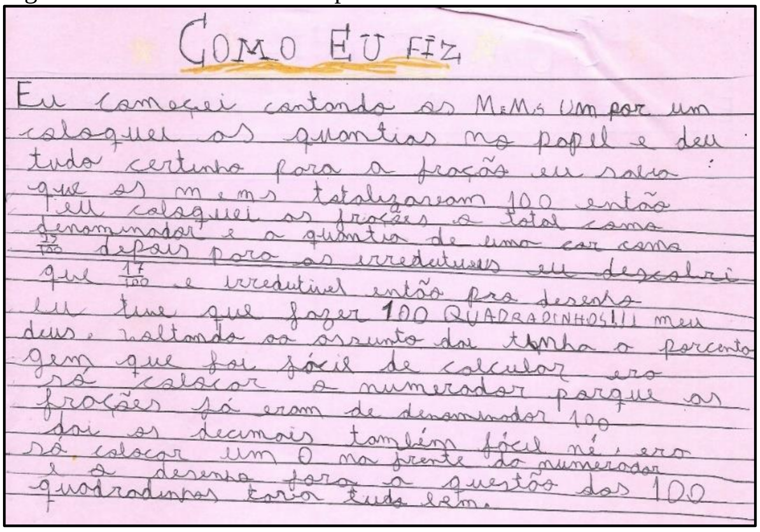
Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Das figuras anteriores, um dos alunos fez manualmente o desenho que representava a fração $\frac{17}{100}$, sem tirar nenhuma dúvida. No entanto, a professora pesquisadora possuía um inteiro dividido em cem partes iguais impresso para entregar caso solicitassem. Isso aconteceu com os outros dois alunos que questionaram se era necessário desenhar os cem quadradinhos, uma vez que a fração já estava no modo irredutível. Assim, a professora forneceu a folha para preenchimento.

Analisando as produções, verificou-se que apenas a partir de uma informação inicial – a quantidade de confetes por cor – os participantes elaboraram as tabelas com as seguintes informações: fração que representava cada uma das cores em relação ao total; fração irredutível da fração encontrada; a porcentagem referente a essa quantidade; o número decimal referente a essa quantidade; a representação geométrica da quantidade encontrada.

Dado o exposto, ficou claro que os participantes compreenderam o conceito de cada uma das representações, como elas se desenvolvem e como ocorre a transição de uma representação para outra. Para organizar e socializar as suas ideias, em outra folha, os alunos expressaram de forma simples os procedimentos realizados para efetuar a tarefa. Nas Figuras 65, 66, 67, 68 e 69 a seguir observam-se os pensamentos transcritos dos alunos.

Figura 65 - Atividade confetes parte IV

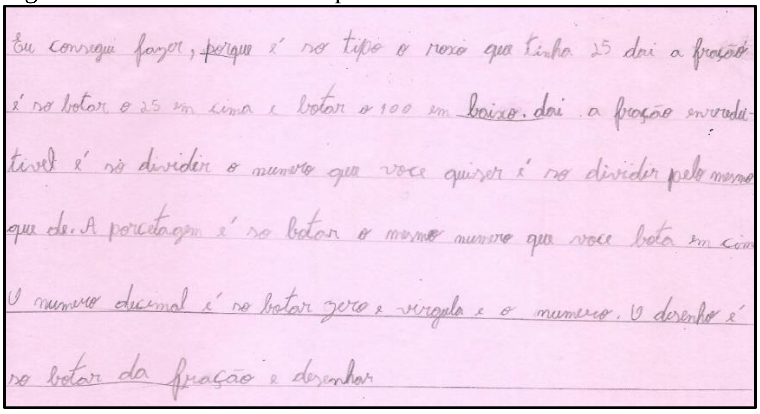


COMO EU FIZ

Eu comecei contando os M&Ms um por um
coloquei as quantias no papel e deu
tudo certinho para a fração eu sabia
que os m&ms totalizaram 100 então
eu coloquei as frações o total como
denominador e a quantia de uma cor como
$\frac{25}{100}$ depois para as irredutíveis eu descobri
que $\frac{17}{100}$ é irredutível então pra desenha
eu tive que fazer 100 QUADRADINHOS!!! meu
deus, voltando ao assunto dai tinha a porcenta
gem que foi fácil de calcular era
só colocar o numerador porque as
frações já eram de denominador 100
dai os decimais também fácil né, era
só colocar um 0 na frente do numerador
e o desenho fora a questão dos 100
quadradinhos foi tudo bem.

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

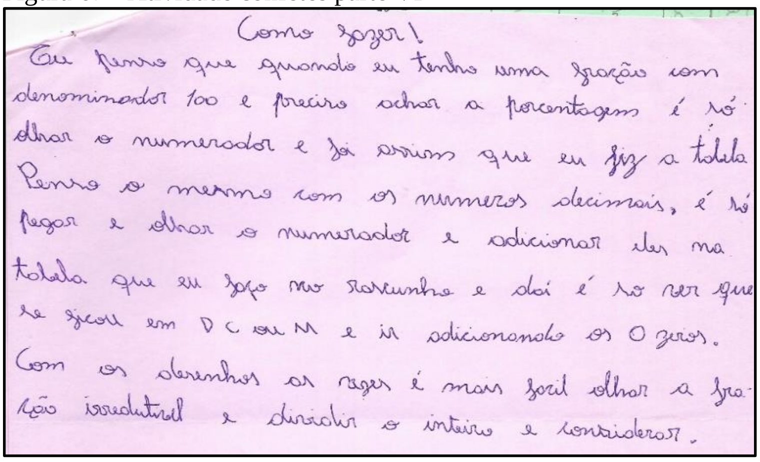
Figura 66 - Atividade confetes parte V



Eu consegui fazer, porque é só tipo o roxo que tinha 25 dai a fração
é só botar o 25 em cima e botar o 100 em baixo. dai a fração irredu-
tível é só dividir o numero que voce quiser é só dividir pelo mesmo
que de. A porcetagem é só botar o mesmo numero que voce bota em cima
O numero decimal é só botar zero e virgula e o numero. O desenho é
só botar da fração e desenhar

Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

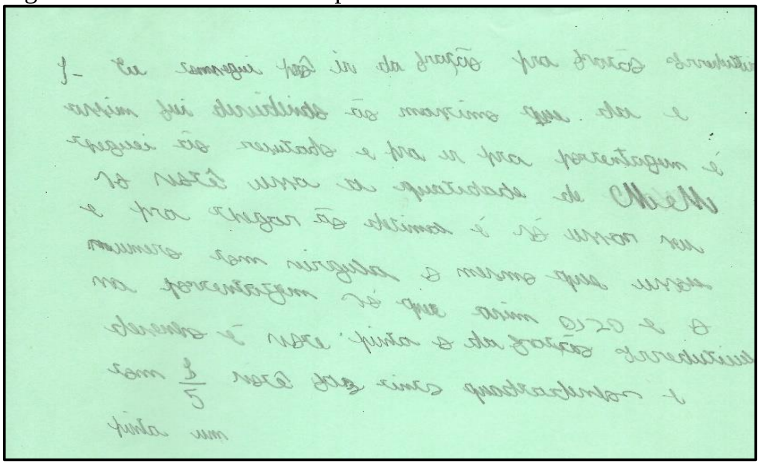
Figura 67 - Atividade confetes parte VI



Como fazer!
Eu penso que quando eu tenho uma fração com
denominador 100 e preciso achar a porcentagem é só
olhar o numerador e foi assim que eu fiz a tabela
Penso o mesmo com os numeros decimais, é só
pegar e olhar o numerador e adicionar eles na
tabela que eu faço no rascunho e dai é só ver que
se ficou em D C ou M e ir adicionando os 0 zeros.
Com os desenhos as vezes é mais facil olhar a fra-
ção irredutível e dividir o inteiro e considerar.

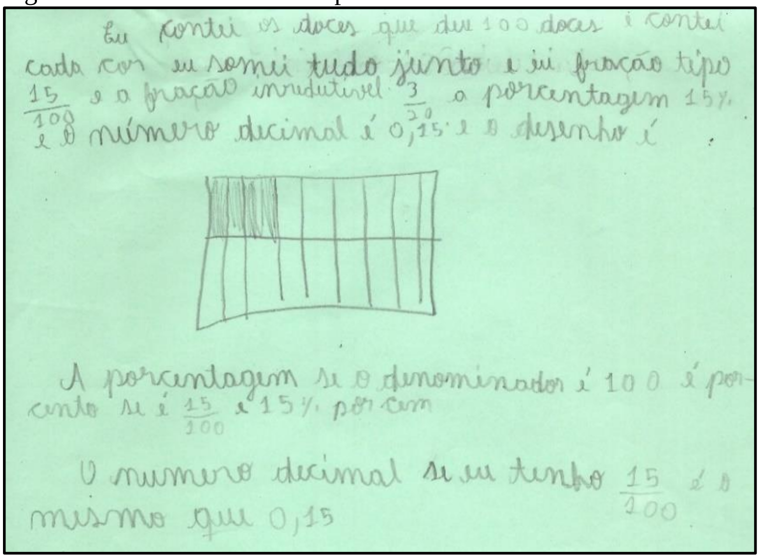
Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Figura 68 - Atividade confetes parte VII



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Figura 69 - Atividade confetes parte VIII



Fonte: Dados da pesquisa, 2023.

Diante do que foi apresentado, salienta-se a importância de expor os alunos a situações diferentes, desafiá-los ou fazer com que eles descrevam suas percepções sobre o que foi trabalhado, verificando se realmente aconteceu a construção da aprendizagem.

A análise apresentada permite concluir que os conceitos foram compreendidos de forma separada e integrados ao longo das atividades e diálogos realizados. Assim, todas as etapas da sequência didática foram importantes para a construção do conhecimento a partir dos pressupostos da teoria da aprendizagem significativa e utilização da representação semiótica.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Walle (2009) indica que o método tradicional de ensino prevalente se inicia com uma explicação oriunda do livro didático, seguido de exercícios indicados aos estudantes. Ocorre que, por vezes, esses exercícios não possuem sentido, respondidos apenas por procedimentos mecânicos e sem compreensão.

O estudo apresentado teve a intencionalidade de analisar a criação de um material potencialmente significativo para a aprendizagem dos números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental a partir de uma sequência didática. As indagações que instigaram esta pesquisa estavam vinculadas à identificação das dificuldades enfrentadas pelos estudantes na compreensão das representações desse conjunto numérico, em que um valor pode ser expresso de maneiras distintas, como fração, decimal, percentual e até mesmo por meio de representações visuais.

Conforme verificado em alguns livros didáticos, é perceptível que a forma como esse tema é tratado, abordando as frações, seguido por decimais e, posteriormente, porcentagens, cada tópico com conceitos distintos, não favorece uma associação entre as representações. Consequentemente, esse tipo de estratégia resulta em um isolamento das representações, impedindo que, mesmo no Ensino Médio, os alunos estabeleçam conexões entre as representações, visualizando a fração apenas como fração, o decimal apenas como decimal e a porcentagem apenas como porcentagem. Assim, torna-se relevante construir um entendimento sólido dos conceitos, permitindo a transição entre as formas de expressar uma quantidade desde o início do conteúdo que se dá no sexto ano do Ensino Fundamental.

Diante dessa problemática, os aportes teóricos que subsidiaram a criação de um material que auxiliasse a compreensão desse conjunto numérico foram a Teoria dos Registros de Representações Semióticas e a Teoria da Aprendizagem Significativa, em virtude de que, a partir das formas de representar a mesma quantidade, partindo do que o aprendiz já conhece e os demais pressupostos da TAS, pode-se construir uma aprendizagem significativa. Nesse contexto, buscou-se analisar e aplicar uma proposta de ensino para esse tema a partir da pergunta norteadora de pesquisa: de que forma uma sequência didática apoiada na teoria dos registros de representação semiótica pode se constituir um material potencialmente significativo para o desenvolvimento de aprendizagens dos números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental?

Visando responder a esta questão de pesquisa, objetivou-se o desenvolvimento, implementação e aplicação de um material potencialmente significativo para a aprendizagem de números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental. De maneira mais aprofundada, o propósito da pesquisa foi investigar ambas as teorias e efetuar estudos relacionados sobre o tema a partir do site da CAPES, como forma de orientar a pesquisa. A sequência didática elaborada e posta em ação sobre os números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental originou o produto educacional que acompanha esta dissertação, destinado a ser um material de apoio aos professores.

O produto educacional, aplicado em uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental da rede estadual de Passo Fundo/RS, consiste em uma sequência didática que engloba diversas dinâmicas e atividades, visando facilitar o desenvolvimento da aprendizagem. O material está estruturado de maneira hierárquica, permitindo que os alunos, de maneira gradual, expandam suas ideias e ampliem o conhecimento em suas estruturas cognitivas. Ademais, tal organização busca uma relação constante entre uma aula e outra com o objetivo de promover a real compreensão desse conjunto numérico.

Considerando as análises provenientes das perspectivas teorias estudadas, esse material foi organizado de acordo com os pressupostos da TAS e alinhado à TRRS para que, seguindo as premissas da aprendizagem significativa, os alunos compreendam que um valor pode ser escrito de jeitos diferentes e continuar representando a mesma coisa, a partir das representações semióticas. Além disso, o planejamento e a execução das tarefas e explorações práticas constantes nesse subsídio pedagógico contribuíram para a visualização dos conceitos matemáticos, destacando as nuances de cada representação – fracionária, decimal e percentual. Esse enfoque permitiu a assimilação das particularidades de cada representação, inclusive da representação geométrica, revelando e evidenciando as relações entre elas.

Os dados da pesquisa indicaram que o envolvimento dos participantes foi eficaz na maioria dos encontros da sequência didática, resultando no entusiasmo na execução das atividades propostas. Esse engajamento facilitou a compreensão do tema abordado e promoveu questionamentos e diálogos. Além das atividades, as dinâmicas desenvolvidas favoreceram essa predisposição dos participantes, destacando as expressões das suas percepções, tornando a sala de aula um ambiente ideal para aprendizagem e socialização. Destaca-se, ainda, que, além da aprendizagem, alguns alunos conseguiram superar inibições, adquirindo confiança para perguntar e trabalhar em grupo.

Quanto à implementação das dinâmicas e atividades oferecidas na sequência didática, elas proporcionaram aos estudantes experiências sensoriais e visuais, indicando indícios de aprendizagem e compreensão do tema abordado, além de auxiliar na criação de um ambiente lúdico, cooperativo e com participantes ativos. Dessa maneira, o material e a mediação pedagógica da professora instigaram a turma, alcançando um número maior de estudantes participativos e que compreenderam o assunto, dispostos a auxiliar os colegas que precisavam de ajuda.

No entanto, convém mencionar que é insuficiente o material estar bem estruturado e conter tarefas relevantes, como cabe também ao professor desempenhar seu papel de educador e estar disposto a aplicar as atividades com foco no desenvolvimento dos seus alunos, enfrentando os possíveis desafios que podem ocorrer ao sair da zona de conforto. A implementação da sequência didática, como professora pesquisadora, provocou uma transformação na abordagem do ensino, adotando uma postura mais participativa e ativa, instigando os estudantes através de questionamento. Ao alinhar essa prática com os materiais manipuláveis e atividades, promoveu-se a construção do conhecimento e estimulou-se o interesse dos alunos para estudar. Embora o produto educacional tenha sido aplicado em uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental, esse material pode servir de suporte para professores de quaisquer anos que tratam do assunto, funcionando como atividades introdutórias ou de revisão de conteúdo, uma vez que as atividades podem ser trabalhadas de forma isolada, sem a necessidade da sequência didática completa.

As categorias de análise utilizadas para verificar se o material auxiliou na construção da aprendizagem dos alunos – conceitos e transições – foram organizadas da seguinte forma: subsunçores, organizadores prévios, diferenciação progressiva e reconciliação integradora, predisposição do aluno e, por fim, a aplicação em novos contextos. Em relação aos conhecimentos prévios – subsunçores, foi possível identificar que a maioria dos alunos possuía informações em seu cognitivo capazes de ancorar novas informações e novos conceitos. Essa ligação foi observada em mais de um encontro, o que facilitou para a aprendizagem a partir das atividades do material. Sobre os organizadores prévios, eles foram essenciais para efetuar o elo entre os subsunçores e as novas informações. Nos casos observados, as atividades favoreceram e facilitaram esse processo, fazendo com que os estudantes vissem um real sentido no tema trabalhado. A diferenciação progressiva foi primordial, juntamente com a reconciliação integradora, tendo em vista que se verificou que os participantes compreenderam o que é cada conceito com sua representação e particularidades; posteriormente, conseguiram compreender que, por mais que fossem diferentes, poderiam representar o mesmo valor, integrando os conceitos.

Ademais, com base nos resultados da quarta categoria, foi possível identificar a predisposição dos estudantes por meio do interesse manifestado em seus questionamentos e expressões. Por exemplo, durante a demonstração no quadro no caso da equivalência das frações, ao compreenderem que a representação geométrica também é equivalente, foi possível observar as expressões dos alunos evidenciando a compreensão. Além disso, por meio dos relatos escritos e dos diálogos, constatou-se a disposição deles para aprender. Os materiais manipuláveis também foram cruciais nesse processo, permitindo que visualizassem o real sentido na aprendizagem aplicada em situações reais, como a dinâmica do bolo de argila.

No que concerne à última categoria de análise, ficou constatado que os participantes tiveram êxito em aplicar o conhecimento construído em contextos distintos dos trabalhados em sala de aula, principalmente na dinâmica dos confetes, na qual, a partir da informação da quantidade de confetes por cor, conseguiram efetuar os registros em distintas formas de representação. A participação dos alunos foi intensa, proporcionando um encerramento para as atividades realizadas ao longo da sequência didática. Essa fase foi essencial para ter indícios da aprendizagem dos estudantes, tendo em vista que, ao serem confrontados com situações distintas das abordadas e/ou ao dialogarem sobre o tema, exige-se que o aluno demonstre ter compreendido efetivamente o assunto.

Durante a aplicação da sequência didática, além das categorias de análise previamente mencionadas, emergiu uma categoria adicional. Esta categoria não estava originalmente prevista como objetivo e nem relacionada à pergunta norteadora. A motivação dos participantes foi notória de tal forma que surgiu como um dado novo, aparecendo a partir da maneira que a sequencia didática estava organizada, em como os estudantes participaram, se engajaram e se aventuraram a ser mais atuantes no processo de aprendizagem.

Diante dos resultados obtidos nas categorias de análise e em resposta à pergunta que originou a presente pesquisa, conclui-se que uma sequência didática respaldada pela representação semiótica pode ser um material potencialmente significativo, capaz de auxiliar no desenvolvimento de aprendizagem dos números racionais no sexto ano do Ensino Fundamental. A sequência didática organizada de forma hierárquica, buscando compreensão e a transição entre as representações, e seguindo os pressupostos da TAS, torna-se um material pedagógico de grande valia para a utilização dos professores e o progresso da aprendizagem dos estudantes.

Por fim, a expectativa é que o estudo realizado neste trabalho e o produto educacional oriundo da pesquisa possam ser utilizados como materiais pedagógicos de apoio aos professores em seu cotidiano escolar. Isso visa contribuir para a incorporação de alternativas e metodologias para o ensino dos números racionais, promovendo uma compreensão mais eficaz de suas representações e transições.

Para dar continuidade aos estudos, salienta-se a importância da conexão entre as teorias investigadas – TAS e TRRS – como suporte para pesquisas e aplicações em conteúdos diferentes, por exemplo, na elaboração de uma sequência didática abordando funções do segundo grau. Além disso, ambas as teorias podem estabelecer relações com outras teorias, contanto que haja uma concordância entre os autores, como é o caso da TRRS com a Engenharia Didática.

REFERÊNCIAS

AMAZON. *Escala Cuisenaire*. Disponível em: https://m.media-amazon.com/images/I/61MNXp-eR6L._AC_SX425_.jpg. Acesso em: 25 jan. 2023.

AUSUBEL, David Paul. *Retenção e aquisição de conhecimentos:* uma perspectiva cognitiva. Tradução de Lígia Teopisto. Lisboa: Plátano, 2003.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. *Investigação qualitativa em educação.* Tradução de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

CRESWEL, John W. *Projeto de pesquisa*: método qualitativo, quantitativo e misto. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

CAMPAGNA, Michele; CUSEO, Joseph B.; THOMPSON, Aaron; FECAS, Viki S. *Thriving in College & Beyond:* Research Based Strategies for Academic Success and Personal Development. 4th ed. Dubuque, IA: Kendall Hunt, 2016.

CUSEO, Joseph B.; FECAS, Viki S.; THOMPSON, Aaron. *Instructor's Manual for the textbook, Thriving in College & Beyond*: research-based strategies for academic success & personal development. 2nd ed. Dubuque, IA: Kendall Hunt, 2010.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 2007.

DENARDI, Vânia Bolzan. Teoria dos Registros de Representação Semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (EBRAPEM), 21, 2017, Pelotas. *Anais [...]*. Pelotas: UFPel, 2017. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/xxiebrapem/anais-xxi-ebrapem-2/ Acesso em: 11 ago. 2022.

DEPOSITPHOTOS. *Vetor de Furian.* Disponível em: https://br.depositphotos.com/vector-images/equivalente.html. Acesso em: 4 dez. 2022.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em: 27 jul. 2022.

ESCOLA KIDS UOL. *Tangram.* Disponível em: https://escolakids.uol.com.br/matematica/tangram.htm. Acesso em: 20 jan. 2023.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia*. 54. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2016.

FREITAS, José Luiz Magalhães de; REZENDE, Veridiana. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *[S. l.]*, v. 2, n. 3, p. 10-34, 2020. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/5946. Acesso em: 25 jul. 2022.

GIL, Antonio Carlos. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

GIL, Antonio Carlos. *Métodos e técnicas de pesquisa em ciência social*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GIOVANNI JUNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. *A Conquista da matemática*. São Paulo: FTD, 2009.

GOUVEIA, Rosimar. Galileu Galilei. *Toda Matéria*. [s.d.]. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/galileu-galilei/. Acesso em: 22 jan. 2023.

LEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. *Matemática e realidade*. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

LOBATO, Monteiro. *A Aritmética de Emília*. São Paulo: Ciranda Cultural, 2019.

LOPES JÚNIOR, José Erildo. A teoria das representações semióticas de Raymond Duval relacionada ao conceito de ângulos através da lousa digital interativa. *Revista Latino-Americana de Estudos Científicos*, v. 1, n. 3, p. 35-50, maio/jun. 2020. Disponível em: https://periodicos.ufes.br/ipa/issue/view/1176. Acesso em: 20 ago. 2022.

LOREIAN, Ingridy; DARROZ, Luiz Marcelo; ROSA, Cleci Teresinha Werner da. Organizadores prévios no processo de ensino de Física: o que dizem os periódicos da área. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, Belém, v. 16, n. 37, p. 210-223, dez. 2020. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/7690. Acesso em: 27 set. 2022.

MASOLA, Wilson; ALLEVATO, Norma. Dificuldades de aprendizagem Matemática: algumas reflexões. *Educação Matemática Debate*, v. 3, n. 7, p. 52-67, 2019.

MIORIM, Maria Angela. *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

MOREIRA, Marco Antônio. *A teoria da aprendizagem significativa*. 2. ed. Porto Alegre, 2016.

MOREIRA, Marco Antônio. *O que é afinal aprendizagem significativa?* Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2012. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/. Acesso em: 22 set. 2022.

MOREIRA, Marco Antônio. *Teorias de aprendizagem.* São Paulo: EPU, 1999.

PRASS, Alberto Ricardo. *Teorias de Aprendizagem.* 2012. 55 f. Monografia (Especialização em Fundamentos Teóricos para a Pesquisa em Ensino de Física) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ROSA, Cleci Teresinha Werner da; DARROZ, Luiz Marcelo. *Cognição, linguagem e docência*: aportes teóricos. Cruz Alta: Ilustração, 2022.

SANTOS, Josiel Almeida; FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Lúcia Silveira Brum. *Dificuldades na aprendizagem matemática*. 2007. 41 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2007.

SEMIÓTICA. *Dicio*: Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2022. Disponível em: https://www.dicio.com.br/semiotica/. Acesso em: 13 out. 2022.

SILVA, Fernanda Andréa Fernandes. *Significados e representações dos números racionais abordados no exame nacional do ensino médio – ENEM*. 2013. 154 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Teoria e prática de Matemática*: como dois e dois. São Paulo: FTD, 2009.

WALLE, John A. Van de. *Matemática no Ensino Fundamental:* formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZABALZA, Miguel Ángel. *Diários de aula*: um instrumento de pesquisa e desenvolvimento profissional. Porto Alegre: Artmed, 2004.

ANEXO A - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

Você está sendo convidado a participar da pesquisa “Aprendizagem significativa: uma proposta para o ensino dos números racionais no sexto ano utilizando representações semióticas”, de responsabilidade da pesquisadora Fernanda Gheno e orientação do Dr. Luiz Marcelo Darroz. Esta pesquisa apresenta como objetivo investigar as potencialidades de uma sequência didática utilizando as representações semióticas, favorecendo uma aprendizagem significativa, aplicada em uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental. As atividades serão desenvolvidas no decorrer de dois meses no componente curricular Matemática, dentro das dependências da escola, envolvendo a criação de materiais pelos estudantes e atividades a serem coletadas.

Esclarecemos que sua participação não é obrigatória e, portanto, poderá desistir a qualquer momento, retirando seu assentimento. Além disso, garantimos que você receberá esclarecimentos sobre qualquer dúvida relacionada à pesquisa e poderá ter acesso aos seus dados em qualquer etapa do estudo. As informações serão transcritas e não envolvem a identificação do nome dos participantes. Tais dados serão utilizados apenas para fins acadêmicos, sendo garantido o sigilo das informações.

Sua participação nesta pesquisa não traz complicações legais, não envolve nenhum tipo de risco físico, material, moral e/ou psicológico. Caso for identificado algum sinal de desconforto psicológico referente à sua participação na pesquisa, pedimos que nos avise. Além disso, lembramos que você não terá qualquer despesa para participar da presente pesquisa e não receberá pagamento pela participação no estudo.

Caso tenham dúvida sobre a pesquisa e seus procedimentos, você pode entrar em contato com o pesquisador e orientador do trabalho Dr. Luiz Marcelo Darroz pelo e-mail: ldarroz@upf.br ou no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade de Passo Fundo pelo e-mail ppgecm@upf.br.

Dessa forma, se concordam em participar da pesquisa, em conformidade com as explicações e orientações registradas neste Termo, pedimos que registre abaixo a sua autorização. Informamos que este Termo, também assinado pelas pesquisadoras responsáveis.

Passo Fundo, 24 de abril de 2023.

Nome do participante: ____

Data de nascimento: _____/____/______

Pesquisador/a: Fernanda Gheno

APÊNDICE A - Autorização fornecida pela escola

UPF | PPGECM
Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática

CARTA DE AUTORIZAÇÃO DO ESTABELECIMENTO DE ENSINO

Eu, Fernanda Gheno, solicito autorização da Escola Estadual de Ensino Fundamental Gomercindo dos Reis localizada no município Passo Fundo, estado do Rio Grande do Sul, para a realização de atividades de pesquisa associadas a dissertação que desenvolvo junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM) da Universidade de Passo Fundo (UPF), RS. A pesquisa intitulada "Aprendizagem significativa: uma proposta para o ensino dos números racionais no sexto ano utilizando representações semióticas" está vinculada a dados produzidos durante a aplicação do produto educacional, que consiste em atividades didáticas junto a estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. O período de aplicação das atividades na escola será de 01/05/2023 a 28/06/2023 e contará com a visita do professor orientador do estudo, Dr. Luiz Marcelo Darroz.

(X) Autorizo
( ) Não autorizo

Beatris S. Santos

Responsável pela Escola
Beatris Silva dos Santos
Diretora

APÊNDICE B - Questionário para identificação dos subsunçores sobre frações

Questionário para identificação dos subsunçores sobre frações

Profª Fernanda Gheno

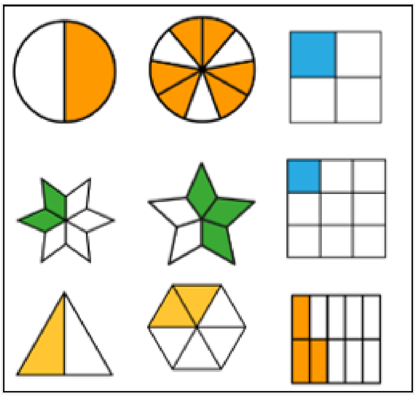
Nome: ______________________________ Turma: _____________ Data: __________

1) Você sabe o que significa a palavra fração e de onde ela surgiu?

____

____

2) Nas imagens abaixo, represente a parte colorida existente em relação à quantidade de partes em que cada figura foi dividida por meio de uma fração.



1)	2)	3)
4)	5)	6)
7)	8)	9)

3) Escreva por extenso as frações abaixo, exatamente como se leem:

a) $\frac{10}{2}$ ____

b) $\frac{3}{10}$ ____

c) $\frac{15}{20}$ ____

d) $\frac{30}{100}$ ____

4) Um bolo foi dividido em três partes iguais para que três pessoas comecem igualmente a mesma quantidade.

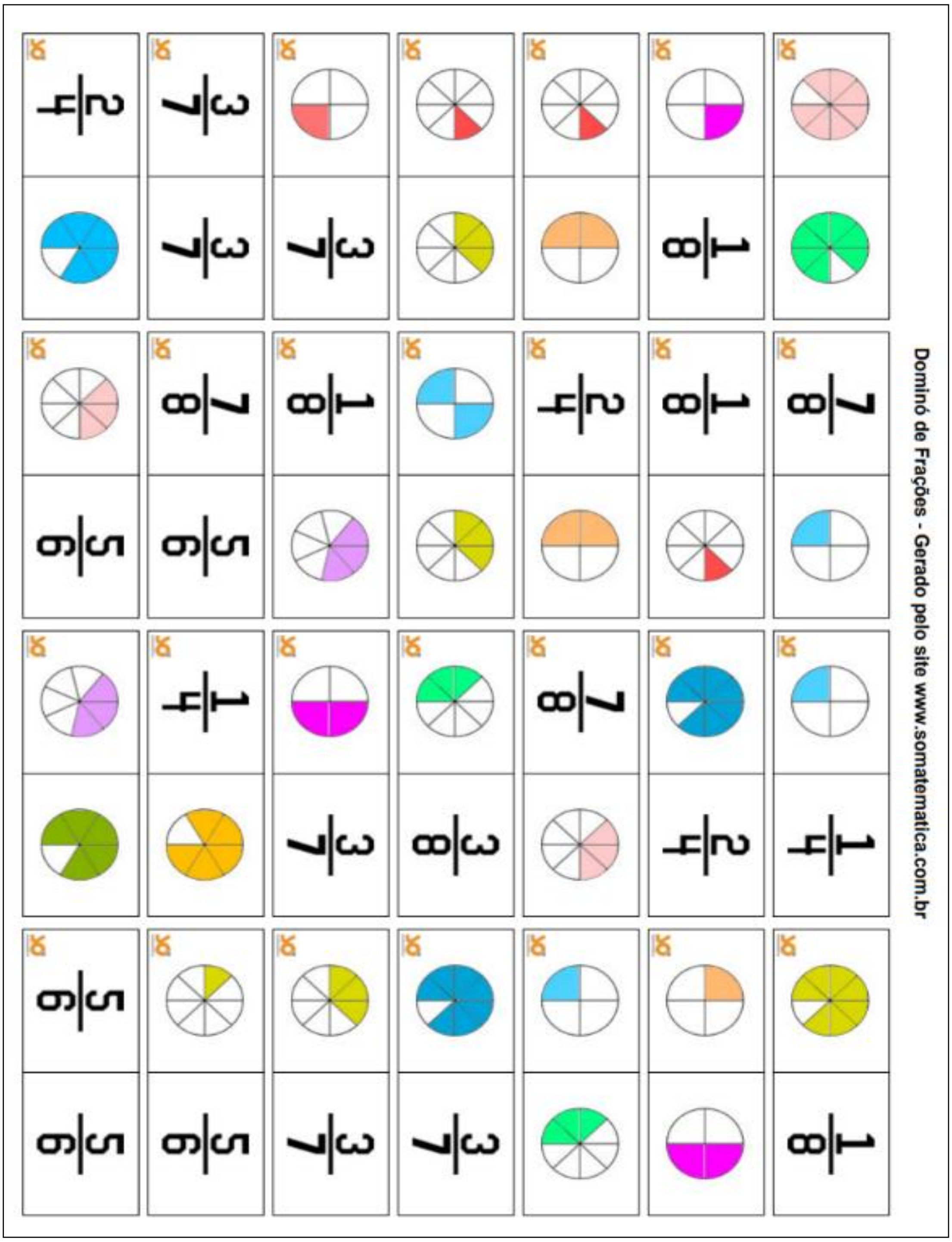
a) Que fração representa a parte de bolo que cada uma das pessoas comeu?

____

b) Que fração representa a parte de bolo que duas pessoas comeram?

____

3) Recorte todas as peças do dominó a seguir, e cole-as na folha em branco da seguinte maneira: Você deverá encaixar as peças relacionando as imagens com o valor fracionário. Utilize todas as peças. Ajuste as peças e cole-as apenas quando tiver certeza da sua posição.

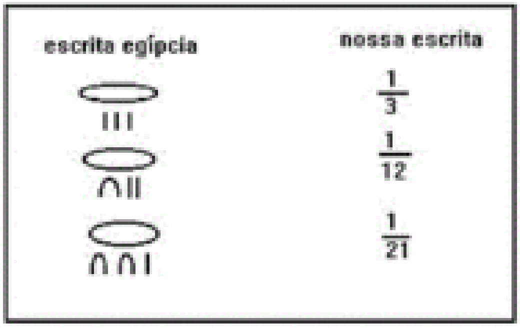


COLE AS PEÇAS AQUI

APÊNDICE C - Contextualização histórica

No antigo Egito por volta do ano 3000 a.C., o faraó Sesóstris distribuiu algumas terras às margens do Rio Nilo para alguns agricultores privilegiados. O privilégio em possuir essas terras era porque todo ano, no mês de julho, as águas do rio inundavam essa região ao longo de suas margens e fertilizavam os campos. Essas terras, portanto, eram bastante valorizadas.

Porém, era necessário remarcar os terrenos de cada agricultor em setembro, quando as águas baixavam. Os responsáveis por essa marcação eram os agrimensores, que também eram chamados de estiradores de corda, pois mediam os terrenos com cordas nas quais uma unidade de medida estava marcada. Essas cordas eram esticadas e se verificava quantas vezes a tal unidade de medida cabia no terreno, mas nem sempre essa medida cabia inteira nos lados do terreno.



Esse problema só foi resolvido quando os egípcios criaram um novo número: o número fracionário. Ele era representado com o uso de frações, porém os egípcios só entendiam a fração como uma unidade (ou seja, frações cujo numerador é igual a 1).

Eles escreviam essas frações com uma espécie de sinal oval escrito em cima do denominador. Mas os cálculos eram complicados, pois no sistema de numeração que usavam no antigo Egito os símbolos se repetiam muitas vezes. Só ficou mais fácil trabalhar com as frações quando os hindus criaram o Sistema de numeração decimal, quando elas passaram a ser representadas pela razão de dois números naturais.

Desde então, as frações foram usadas para a resolução de diversos tipos de problemas matemáticos. Uma das formas mais correntes de se trabalhar com frações é a porcentagem, em que se expressa uma proporção ou uma relação a partir de uma fração cujo denominador é 100. O uso de frações também é de valia extrema para a resolução de problemas que envolvem regra de três.

Disponível em: http://fracaoaprendendo.blogspot.com/2017/04/historia-da-fracao.html. Acesso em: 03 dez. 2022.

APÊNDICE D - Questionário dinâmica bolo de argila

Suponha que dois professores vão comer o bolo inteiro, sendo que eles precisam comer a mesma quantidade. Para isso, o que é preciso fazer?
- Usando o fio de nylon, parta o bolo, dividindo-o em duas partes iguais.
a) Como podemos representar cada uma dessas partes na forma esquemática?

b) Como ficaria essa representação na forma numérica?

Você é capaz de encontrar outra maneira de partir o bolo em duas partes iguais?
Como ficaria essa representação na forma esquemática?

Como ficaria essa representação na forma numérica?

Onde há mais bolo, nas duas partes juntas ou no bolo inteiro?

Em quantas metades ou em quantas partes iguais você partiu o bolo?

Representando na forma esquemática e numérica, faça a ilustração do bolo.
Dividido em duas partes iguais:

Metade do bolo:

Tem o mesmo sentido dizer: um bolo inteiro ou dois meios bolos? Justifique.

De quantos meios bolos você precisa para ter um bolo inteiro?

E se dividirmos pela metade cada metade de bolo, quantas partes ficam?

Represente essas partes na forma esquemática e numérica.

Represente cada uma dessas partes na forma esquemática e numérica

Se pegarmos três quartos, teremos um bolo inteiro?

Represente três quartos na forma esquemática e numérica.

Para termos um bolo inteiro, quantos quartos de bolo são necessários?

Reconstrua o bolo. Agora divida-o em três partes iguais, considerando que três pessoas vão comer a mesma quantidade de bolo.
O bolo inteiro possui quantos terços?

Represente na forma esquemática e numérica.

Dividindo essas três partes pela metade, quantas partes vão ficar?

Represente essa divisão na forma esquemática e numérica.

Em quantas partes ou sextos você dividiu o bolo?

Represente na forma esquemática e numérica.

Se pegarmos três sextos de bolo, teremos um bolo inteiro?

Represente três sextos de bolo na forma esquemática e numérica.

Três sextos representam que parte do bolo?

APÊNDICE E - Exercícios dinâmica 2

1) Compare utilizando o material criado:

a) Quantos meios da folha equivalem a folha inteira? ___________________________________

b) Quantos quartos da folha equivalem a folha inteira? _________________________________

c) Quantos quartos da folha equivalem a meia folha? ___________________________________

d) Quantos oitavos da folha equivalem a folha inteira? _________________________________

e) Quantos oitavos da folha equivalem a meia folha? ___________________________________

f) Quantos oitavos equivalem a um quarto de folha? ___________________________________

2) Divida o retângulo a seguir e pinte conforme a quantidade indicada pela fração:

a. $\frac{1}{2}$	b. $\frac{3}{4}$	c. $\frac{2}{8}$
d. $\frac{3}{8}$	e. $\frac{4}{8}$	f. $\frac{7}{8}$

3) Marque a parte da pizza que cada aluno vai comer, tomando como referência a pizza inteira.

 $\frac{1}{2}$ de uma pizza				
 1 pizza				
 a quarta parte da pizza				

4) Compare as frações abaixo utilizando os recortes feitos na dinâmica e os símbolos: >, < ou =

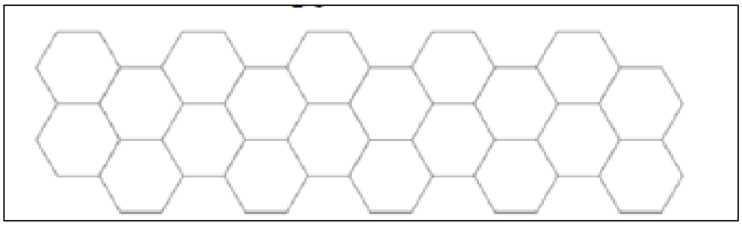
a) $\frac{1}{2}$ ---- $\frac{2}{8}$ b) $\frac{1}{2}$ ---- $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ ---- $\frac{4}{8}$ d) $\frac{5}{8}$ ---- $\frac{3}{8}$

e) $\frac{1}{8} - - - - \frac{4}{4}$ f) $\frac{6}{8} - - - - \frac{3}{4}$ g) $\frac{1}{2} - - - - \frac{2}{4} - - - - \frac{4}{8}$

h) $\frac{3}{4} - - - - \frac{3}{8}$ i) $\frac{4}{4} - - - - 1\ folha\ inteira$ j) $\frac{8}{8} - - - - 1\ folha\ inteira$

RESOLVA PARA ENTREGAR

1) Veja a figura a seguir. Pinte $\frac{1}{5}$ de vermelho e $\frac{1}{10}$ de azul.



a) Quantos hexágonos você pintou de vermelho?

____

b) Quantos hexágonos você pintou de azul?

____

c) Explique o que você pensou para resolver essa questão:

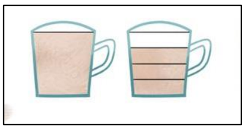
____

____

____

____

2) Veja as xícaras a seguir.



a) Indique a fração que representa a quantidade de cada xícara.

____

____

b) Escreva na forma de adição de frações, a quantidade total das duas xícaras. Após, explique de que forma você resolveu essa questão.

APÊNDICE F - Aplicações das frações

1) Observe a foto ao lado e responda:

a) Que fração representa o total de pessoas nessa foto?

b) Que fração representa o número de meninos nessa foto?

c) Que fração representa o número de meninas nessa foto?

2) Lucas tem 3 anos. A idade de Lucas é igual a $\frac{3}{5}$ da idade de sua prima. Quantos anos tem a prima de Lucas?

3) Ricardo ficou doente e precisou faltar algumas aulas. Ele sabe que não pode faltar mais de $\frac{1}{4}$ das aulas dadas. Se a classe de Ricardo tiver 180 aulas de Matemática durante o ano, qual é o número máximo de faltas que ele poderá ter nessa disciplina?

4) Alexandro leu 10 páginas de uma revista e Maurício leu 28 páginas de um livro. Desse modo, Alexandre leu $\frac{2}{5}$ da revista e Maurício leu $\frac{4}{5}$. Quantas páginas tem a revista e o livro?

5) Sabe-se que $\frac{2}{7}$ de um número é 14.

a) Quanto é $\frac{1}{7}$ desse número?
b) Qual é o número?

6) Como devem ser lidas as rações abaixo?
a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{11}{50}$ d) $\frac{9}{1000}$ e) $\frac{5}{12}$ f) $\frac{7}{13}$

7) Que fração está indicada em cada item?
a) quatrocentos e vinte e três milésimos.
b) dois décimos
c) sete vinte avos
d) três centésimos

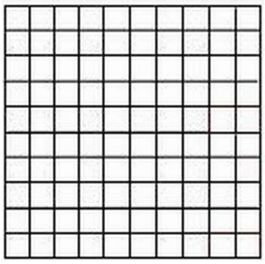
e) três quintos

8) Calcule quanto é:

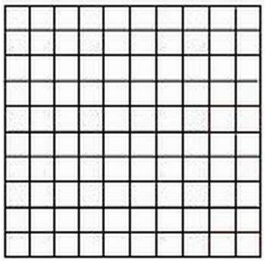
a) $\frac{1}{4}$ de 20 b) $\frac{1}{5}$ de 30 c) $\frac{1}{3}$ de 24 d) $\frac{5}{7}$ de 14 e) $\frac{3}{4}$ de 24 f) $\frac{2}{5}$ de 20

9) Nas grades abaixo, pinte a fração equivalente à:

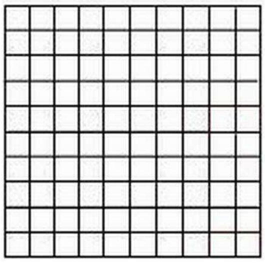
a) $\frac{1}{2}$



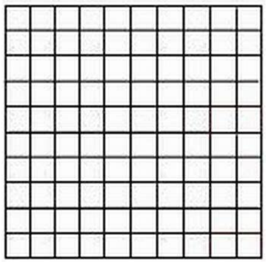
b) $\frac{1}{4}$



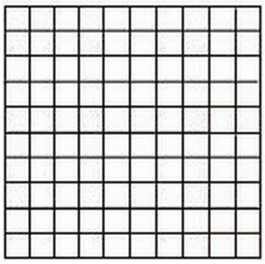
c) $\frac{1}{100}$



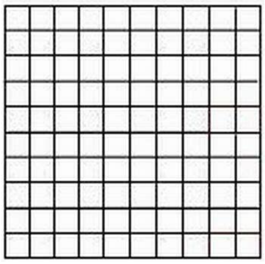
d) $\frac{25}{50}$



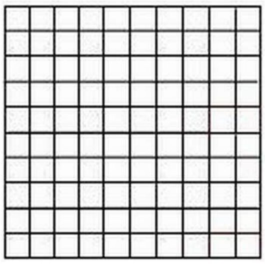
e) $\frac{25}{100}$



f) $\frac{2}{50}$



g) $\frac{4}{100}$



10) Que fração representa:

a) 8 horas de um dia?

b) 2 dias da semana?

c) 5 meses de um ano?

11) Represente, através de desenhos, as frações da questão anterior.

RESOLVA PARA ENTREGAR

1) Você deve descobrir qual é o número abaixo. Explique como você pensou para resolver essa situação e faça um desenho representando cada uma das letras.

a) $\frac{1}{3}$ dele é 5.

DESENHO:

b) $\frac{4}{5}$ dele é 28

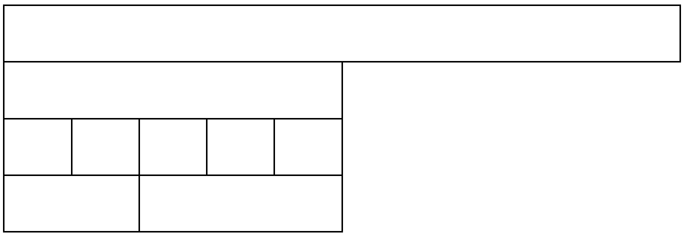
DESENHO:

2) Na questão 8 da lista anterior, você calculou quanto era $\frac{1}{4}$ de 20 e $\frac{3}{4}$ de 24. Explique quais os resultados e como você fez para resolver.

APÊNDICE G - Conceito e exercícios sobre equivalência, simplificação e irredutibilidade

Frações equivalentes

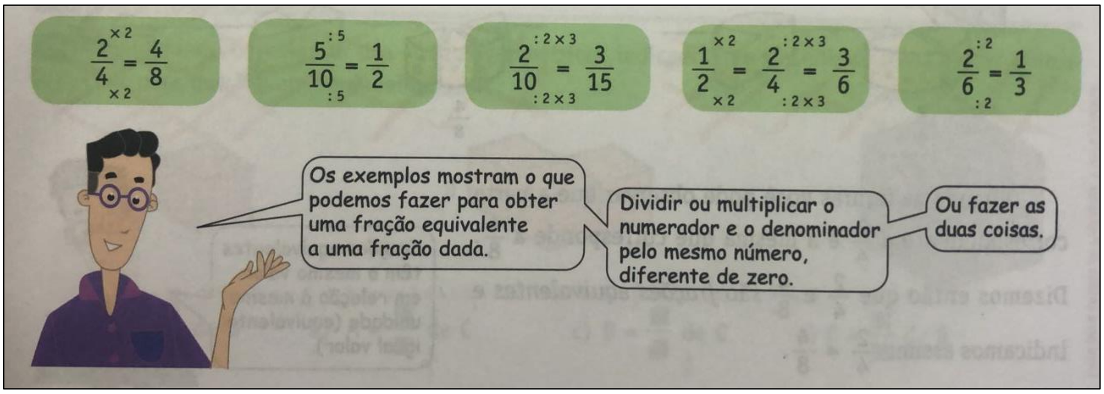
Considerando a região retangular formada pela peça laranja como um inteiro, cada peça retangular amarela do cuisenaire representa que parte do inteiro? E 1 peça verde e 1 peça vermelha, juntas, representam que parte do inteiro? E 5 peças beges, juntas, representam que parte do inteiro? Pinte as peças abaixo.



Vamos dividir a unidade de referência, que é a peça laranja, em 2 partes iguais e pintar 1 delas de azul claro. A parte pintada representa $\frac{1}{2}$ do inteiro.

Compare a parte representada pela fração $\frac{5}{10}$ com a parte representada pela fração $\frac{1}{2}$. O que podemos concluir? ____.
Portanto, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$ são chamadas de ____.

<u>Observe o que acontece com as frações equivalentes nos casos a seguir:</u>



Agora, realize as atividades a seguir:

1) Escreva:

a) Mais uma fração equivalente a $\frac{2}{4}$ e a $\frac{4}{8}$.

b) A fração de denominador 10, que também é equivalente a $\frac{2}{4}$.

c) A fração de numerador 10, equivalente a $\frac{2}{4}$.

2) Analise as situações a seguir:

Pedro gastou $\frac{2}{10}$ de 30 reais

Cláudio gastou $\frac{1}{6}$ de 30 reais

Laura gastou $\frac{3}{15}$ de 30 reais

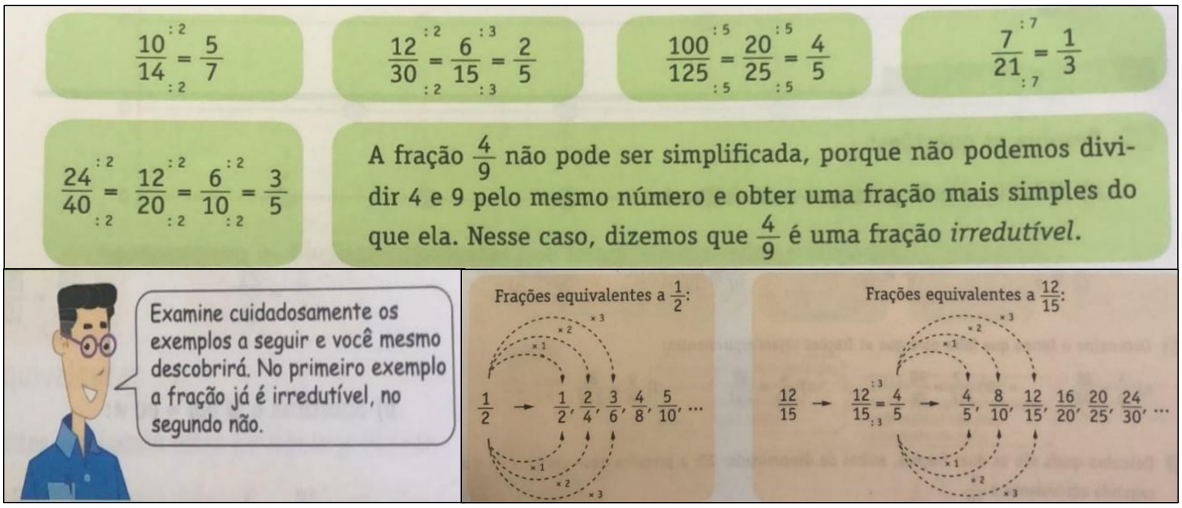
Calcule quanto gastou cada um e depois responda: Dessas três frações, quais são equivalentes?

3) Substitua o * pelo número que está faltando.

a) $\frac{3}{7} = \frac{21}{*}$ b) $\frac{18}{20} = \frac{*}{10}$ c) $\frac{6}{9} = \frac{2}{*} = \frac{*}{15}$ d) $\frac{14}{10} = \frac{*}{35}$

<u>Simplificação de frações</u>

Quando dividimos o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número, diferente de zero, dizemos que foi feita a simplificação da fração, pois a fração obtida é equivalente a ela, porém mais simples. Veja os exemplos a seguir:



1) Simplifique até chegar em uma fração irredutível:

$a)$ $\frac{21}{28}$ b) $\frac{16}{25}$ c) $\frac{9}{45}$ d) $\frac{108}{144}$ e) $\frac{16}{32}$ f) $\frac{10}{6}$ g) $\frac{18}{32}$ h) $\frac{72}{240}$

2) Quando simplificamos uma fração, seu valor aumenta, diminui ou fica o mesmo?

3) Sabendo que o 6º ano A tem 14 meninos e 21 meninas, determine:

a) Que fração da classe os meninos representam;

b) Que fração da classe as meninas representam;

4) Um caminhoneiro já percorreu 200 km e ainda faltam 40 km para completar um percurso. Que fração do percurso ele já percorreu?

Jornal Legal

São Paulo, 6 de fevereiro de 2009 • sexta-feira •

A torcida ocupou [redacted] dos lugares

No jogo do Brasil, dos 72 000 lugares do estádio, a torcida ocupou 63 000 lugares

5) Segundo a notícia do jornal ao lado, qual é a fração irredutível que deve aparecer onde está o quadrado preto?

6) Analise a discussão entre Pedro e Gabriel:

Pedro: "$\frac{4}{32}$ é equivalente a $\frac{10}{80}$ porque o 4 cabe 8 vezes no 32 e o 10 cabe 8 vezes no 80. Então, podemos dizer que cada numerador cabe a mesma quantidade de vezes em seu numerador".

Gabriel: "$\frac{4}{32}$ não é equivalente a $\frac{10}{80}$ porque não há nenhum número natural que multiplicado por 4 dê 10, então não existe uma fração equivalente a $\frac{4}{32}$ com numerador 10."

O que você pensa sobre os argumentos de Pedro e Gabriel? As frações $\frac{4}{32}$ e $\frac{10}{80}$ são equivalentes?

7) Indique em cada caso, se as frações são equivalentes ou não.

a) $\frac{7}{8}$ e $\frac{42}{40}$ b) $\frac{12}{8}$ e $\frac{108}{45}$ c) $\frac{34}{8}$ e $\frac{102}{24}$ d) $\frac{24}{7}$ e $\frac{121}{35}$

e) $\frac{6}{10}$ e $\frac{9}{15}$ f) $\frac{21}{6}$ e $\frac{625}{186}$ g) $\frac{32}{6}$ e $\frac{112}{18}$ h) $\frac{4}{6}$ e $\frac{35}{40}$

APÊNDICE H - Comparação de frações

1) Neste bimestre, a professora de Português pediu que os alunos lessem um livro. Sérgio leu $\frac{2}{7}$ do livro em 6 horas. Bárbara gastou 3 horas para ler $\frac{3}{5}$ do mesmo livro.

a) Quem leu mais páginas do livro?
b) Mantendo esse ritmo, quantas horas Sérgio ainda vai demorar para ler todo o livro?
c) Quantas horas Bárbara precisa para concluir a leitura?

2) Mariana e Viviane combinaram de ir de bicicleta de Uberlândia até Uberaba, mas não aguentaram e pararam no caminho. Mariana percorreu $\frac{7}{10}$ da estrada e Viviane percorreu $\frac{9}{11}$. Qual delas chegou mais perto do destino?

3) Utilize os símbolos: <, > ou = nas sentenças abaixo e faça os desenhos correspondentes:

a) $\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{3}$ $\qquad$ b) $\frac{2}{5}$ $\quad$ $\frac{2}{7}$ $\qquad$ c) $\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{2}{5}$

4) Tenho dois cintos iguais, um azul e um roxo. No cinto azul farei um corte $\frac{3}{8}$ de seu comprimento e do roxo, $\frac{3}{5}$. Qual dos dois cintos ficará mais comprido?

5) Várias crianças abriram uma caixa de chocolates, repartiram e comeram alguns:

NOME	QUANTIDADE DE CHOCOLATE
Alberto	$\frac{1}{2}$
Vitor	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
João Pedro	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$
Gustavo	$\frac{3}{4}$
Maria Clara	$\frac{3}{6}$

a) Quais crianças comeram a mesma quantidade?
b) Quem comeu mais?

6) O time de basquete de futebol masculino da escola de Ricardo está na foto a seguir. Cada jogador vai receber uma fração para colocar na camiseta. A fração maior fica com o jogador mais alto, a menor para o mais baixo. Coloque as frações em ordem crescente e descubra para qual jogador ela irá.

$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{15}$

7) No campeonato, o time da escola de Ricardo ganhou $\frac{5}{8}$ dos jogos que disputou e o time de uma outra escola ganhou $\frac{7}{16}$ do mesmo total de jogos. Qual dos dois times obteve melhor classificação?

APÊNDICE I - Tipos de frações

1) Identifique as frações abaixo como próprias, impróprias ou aparentes, fazendo o desenho de cada uma delas:

a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{2}{8}$ d) $\frac{15}{10}$ e) $\frac{3}{3}$ f) $\frac{10}{5}$ g) $\frac{7}{7}$ h) $\frac{10}{3}$ i) $\frac{5}{2}$

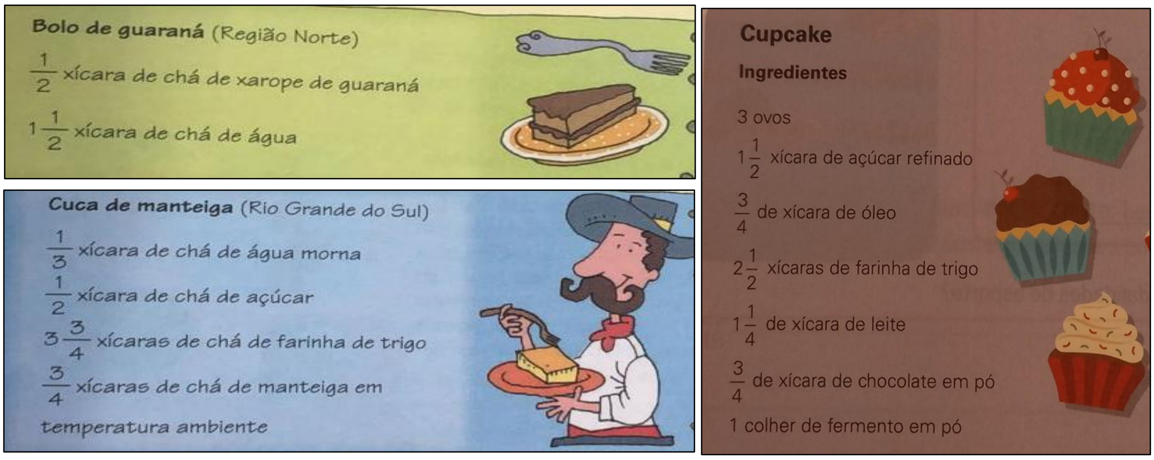
2) Transforme os números mistos em frações impróprias:

a) $3\frac{1}{4}$ b) $5\frac{1}{3}$ c) $1\frac{3}{5}$ d) $2\frac{4}{5}$ e) $8\frac{1}{3}$ f) $9\frac{1}{5}$

3)Transforme as frações impróprias em números mistos:

a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{15}{13}$ d) $\frac{12}{5}$ e) $\frac{9}{4}$ f) $\frac{18}{11}$

4) Na imagem abaixo, pode-se visualizar algumas receitas com uma breve história:



a) Coloque em forma decrescente os números racionais que aparecem na forma mista.

b) Quais números racionais estão representados por frações menores que 1 inteiro?

c) Compare a quantidade de xarope de guaraná do bolo com a quantidade de açúcar da cuca? O que podemos concluir?

d) Em qual das receitas aparece o maior número racional? Qual é ele?

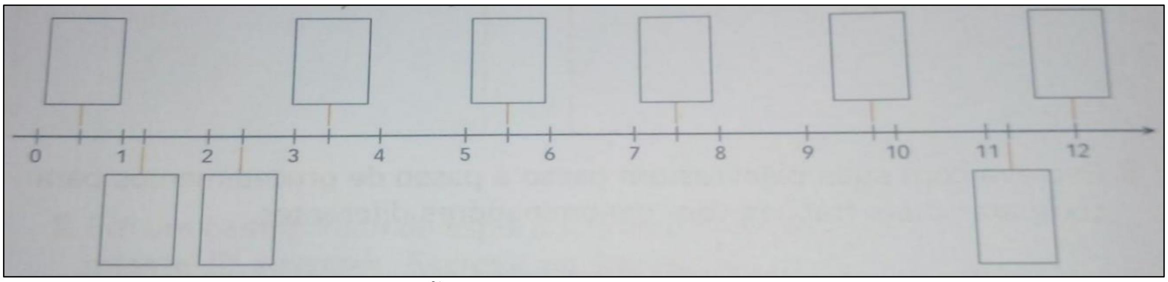
e) Traga para a próxima aula uma receita que sua família gosta de fazer e represente as medidas dos ingredientes com números racionais, e faça os desenhos correspondentes.

APÊNDICE J - Frações na reta numérica

1) Desta atividade você deverá:

   - Localizar cada uma das frações abaixo na reta numérica.
   - Escrever as frações por extenso.
   - Encontrar uma fração equivalente.
   - Fazer um desenho que represente essa fração.

$\frac{17}{5}$ $\frac{12}{5}$ $5\frac{1}{2}$ $\frac{7}{2}$ $1\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{4}$



	ESCRITA:	FRAÇÃO EQUIVALENTE:	DESENHO:
$\frac{17}{5}$			
$\frac{12}{5}$			
$5\frac{1}{2}$			
$\frac{7}{2}$			
$1\frac{3}{4}$			
$\frac{1}{2}$			
$\frac{5}{4}$			

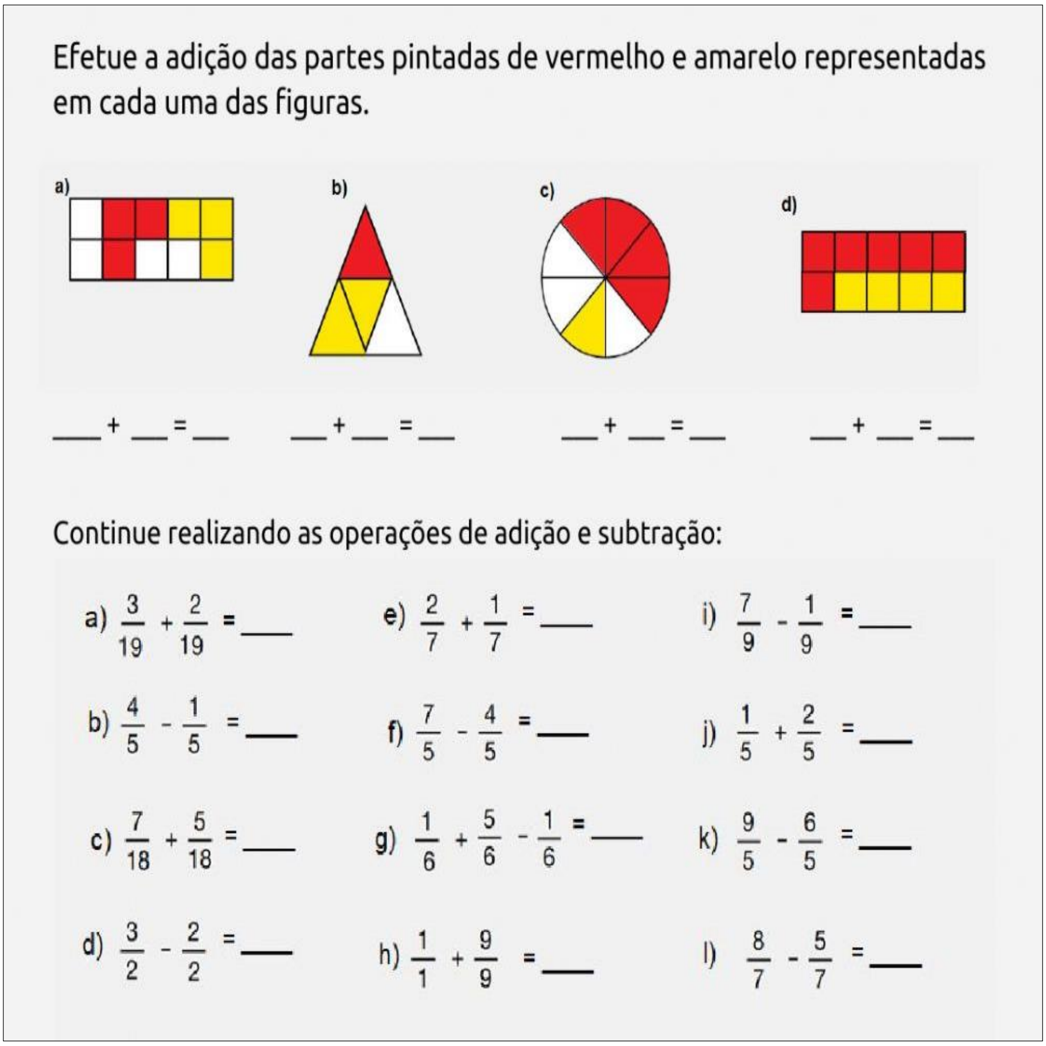
APÊNDICE K - Adição e subtração de frações

1) Resolva as operações a seguir:

a) $\frac{4}{7} + \frac{2}{7}$ b) $\frac{8}{5} - \frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{10} + \frac{1}{4}$ d) $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$

e) $\frac{5}{8} - \frac{1}{4}$ f) $1\frac{1}{4} + 2\frac{1}{6}$ g) $1\frac{3}{10} - \frac{8}{9}$ h) $\frac{3}{25} + \frac{2}{5}$ i) $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8}$

2)



Efetue a adição das partes pintadas de vermelho e amarelo representadas em cada uma das figuras.

a) b) c) d)

a) ___ + ___ = ___ b) ___ + ___ = ___ c) ___ + ___ = ___ d) ___ + ___ = ___

Continue realizando as operações de adição e subtração:

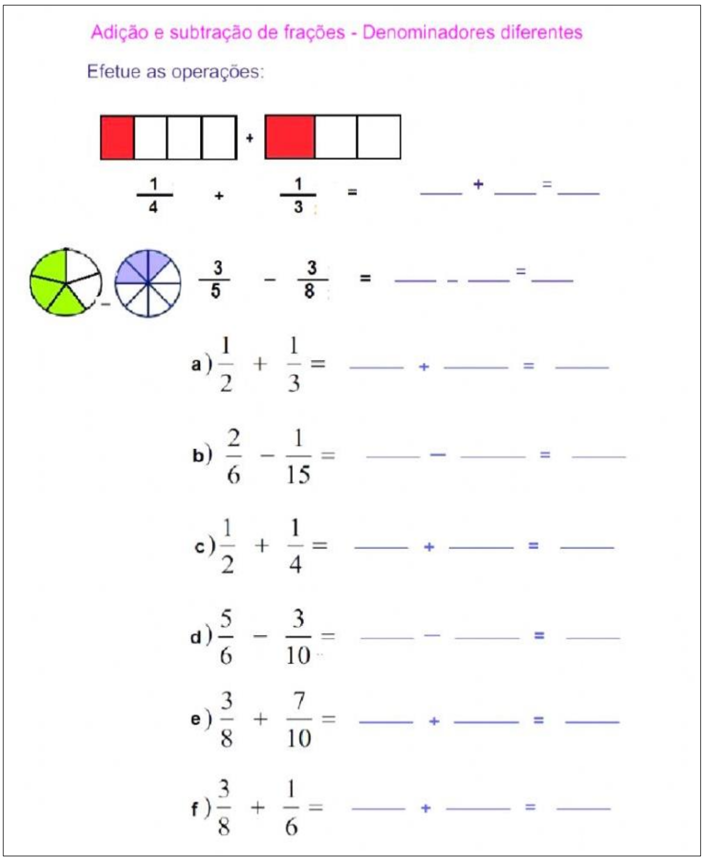
a) $\frac{3}{19} + \frac{2}{19} =$ ___ e) $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} =$ ___ i) $\frac{7}{9} - \frac{1}{9} =$ ___

b) $\frac{4}{5} - \frac{1}{5} =$ ___ f) $\frac{7}{5} - \frac{4}{5} =$ ___ j) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} =$ ___

c) $\frac{7}{18} + \frac{5}{18} =$ ___ g) $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} - \frac{1}{6} =$ ___ k) $\frac{9}{5} - \frac{6}{5} =$ ___

d) $\frac{3}{2} - \frac{2}{2} =$ ___ h) $\frac{1}{1} + \frac{9}{9} =$ ___ l) $\frac{8}{7} - \frac{5}{7} =$ ___

3)

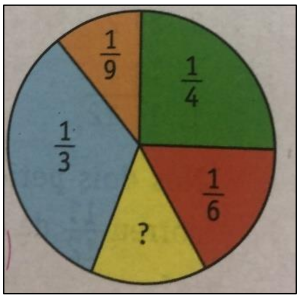


4) Roberta iniciou uma viagem com $\frac{5}{6}$ do tanque de gasolina abastecido e gastou durante essa viagem o equivalente a $\frac{1}{2}$ do tanque. A gasolina que sobrou equivale a que fração do tanque?

5) Pela manhã um caminhoneiro percorreu $\frac{2}{3}$ de uma distância e à tarde, $\frac{1}{4}$. Que fração da distância ele percorreu nos dois períodos?

6) Gilberto plantou $\frac{1}{4}$ de sua horta com tomates, $\frac{1}{5}$ com cenouras e o restante com verduras. Que fração representa a parte da horta que foi plantada com verduras?

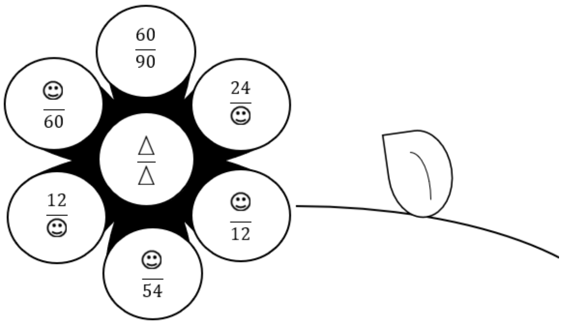
7) Examine a figura a seguir e responda:



a) Que fração corresponde às partes verde e vermelha juntas?
b) Que fração representa a diferença entre a parte azul e a laranja?
c) Que fração representa a quantidade que a parte vermelha tem a menos do que a azul?
d) Que fração representa a parte amarela?

APÊNDICE L - Questionário para entregar

1) Substitua os ☺ por números naturais, de modo que as frações sejam equivalentes. Substitua os △ pela fração irredutível equivalente às demais.



2) Somando as frações, descubra:

a) Qual time irá ganhar o cabo de guerra: o time de camiseta branca ou o time de camiseta amarela?
b) Qual a pontuação de cada time?

3) Depois de percorrer 156 quilômetros de uma estrada, seu Gustavo parou para abastecer. Ele gastou R$60,00, quantia equivalente a $\frac{3}{17}$ do dinheiro que levava. No posto, um mapa indicava que ele havia percorrido, até então, $\frac{12}{19}$ da viagem planejada.

a) De quantos quilômetros era a viagem completa que seu Gustavo planejou?
b) Depois da parada para abastecer, quanto sobrou em dinheiro para seu Gustavo prosseguir a viagem?

4) Seja a fração $\frac{8}{20}$.

a) Em quantas partes o inteiro foi dividido?
b) Quantas partes desse inteiro foram consideradas?
c) Faça um desenho que represente essa fração.

d) Encontre uma fração equivalente.
e) Simplifique até encontrar a fração irredutível.

5) Na classe de Marcelo, $\frac{2}{5}$ dos alunos preferem ler romances, $\frac{4}{15}$ preferem ler livros de aventura e o restante dos alunos, revistas em quadrinhos. Qual grupo tem mais alunos?

6) Fernando tem uma tira retangular de cartolina branca. Ele dividiu essa tira em 9 partes iguais, pintou 5 dessas partes de laranja e 2 dessas partes de roxo. A parte colorida da tira representa que fração da tira inteira?

7) Fernando tem outra tira retangular que está dividida em 9 partes iguais. Nessa tira, 5 partes iguais já foram coloridas de amarelo, e dessa parte colorida ele eliminou 2 partes. Nessas condições, a parte colorida que restou representa que fração da tira inicial?

8) Um fazendeiro semeia $\frac{2}{7}$ de sua fazenda com milho e $\frac{1}{5}$ com soja. Qual é a fração que representa o total semeado? Qual fração da fazenda ainda não foi semeada?

9) Um atleta decide treinar correndo numa determinada pista de corrida. No primeiro dia corre $\frac{3}{4}$ da pista, no segundo $\frac{4}{2}$ e no terceiro dia $\frac{7}{8}$.
   a) Em qual dos dias ele correu mais?
   b) Considerando os três dias, quantas voltas inteiras ele deu na pista?

10) Efetue as operações a seguir:

a) $\frac{4}{9} - \frac{1}{6}$ b) $\frac{4}{5} : 2$ c) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$ d) $8 . \frac{3}{4}$ e) $\frac{5}{7} . 3$

f) $\frac{1}{8} + \frac{5}{8}$ g) $\frac{3}{2} + \frac{1}{22}$ h) $\frac{1}{4} - \frac{2}{9}$ i) $2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}$

11) Complete a tabela a seguir:

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA	NUMERO DE PARTES EM QUE O INTEIRO FOI DIVIDIDO	NUMERO DE PARTES CONSIDERADAS	FRAÇÃO QUE REPRESENTA AS PARTES CONSIDERADAS DO INTEIRO	FRAÇÃO EQUIVALENTE À FRAÇÃO ENCONTRADA	FRAÇÃO IRREDUTÍVEL À FRAÇÃO ENCONTRADA	CLASSIFICAÇÃO QUANTO AO TIPO DE FRAÇÃO	LEITURA DA FRAÇÃO
							
							
							
							
							

APÊNDICE M - Exercícios porcentagem

1) Represente as frações abaixo em forma de porcentagem e escreva como se leem esses números.

a) $\frac{5}{100}$ b) $\frac{20}{100}$ c) $\frac{80}{100}$ d) $\frac{50}{100}$

2) Escreva a fração correspondente de denominador 100:

a) 10% b) 2% c) 60% d) 100%

3) Escreva a fração que representa a porcentagem e faça a simplificação:

a) 40% b) 25% c) 50% d) 73%

4) Transforma as frações abaixo em frações equivalentes de denominador 100 e diga qual é a porcentagem.

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{2}{10}$ c) $\frac{3}{25}$ d) $\frac{21}{300}$

5) Nos desenhos abaixo, escreva a fração e a porcentagem que representam a parte pintada de cada figura.

6) Complete as sentenças:

a) A metade de uma quantia é o mesmo que _______% dela.

b) 25% de uma quantia é o mesmo que ___________ dessa quantia.

c) A decima parte de um valor corresponde a _____ % desse valor.

d) 1/5 de um valor é o mesmo que _____ % desse valor.

7) Por meio de uma tabela, represente as quantidades acima na sua forma de fração, percentual e desenho.

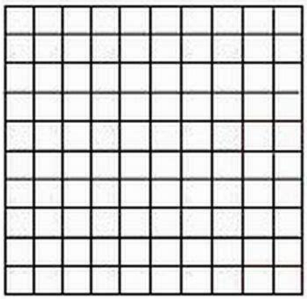
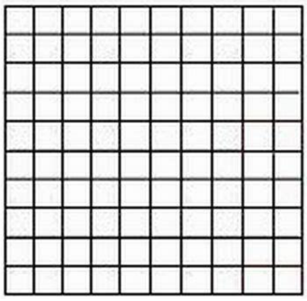
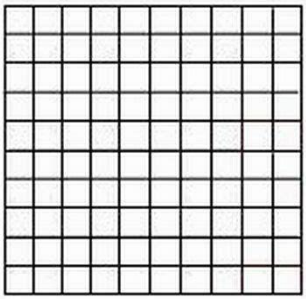
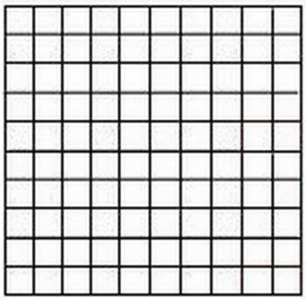
8) Quanto é 45% de 60? E quanto é 75% de R$168,00?

9) Uma loja dá desconto de 10% nas compras à vista. Uma pessoa comprou um computador que custava R$3.320,00 pagando à vista.
    a) Qual foi o valor do desconto?
    b) Qual foi o valor pago pelo computador, nessas condições?

10) Um celular custa R$1.260,00 a vista. Se for vendido em três prestações, terá um acréscimo de 5%. Qual será o valor de cada prestação?

11) Nas malhas quadriculadas abaixo, pinte a porcentagem e diga que fração ela representa e, quando possível, simplifique até encontrar a fração irredutível:

a) 50% b) 75% c) 27% d) 80%

12) José tinha R$40,00 e gastou 15%. Com quanto ele ficou?

13) Complete cada item:
    a) Quem tem R$60,00 e gasta 50%, gasta R$______
    b) Desconto de 10% em um objeto que custa R$90,00, é um desconto de R$____
    c) Em um cinema com 200 poltronas, 10% estão vazias, então ____ poltronas estão ocupadas.

14) Calcule:
    a) 70% de 80
    b) 44% de 1200
    c) 8% de 125

APÊNDICE N - Exercícios transição fração, porcentagem e desenho

1. Transforme as frações abaixo em porcentagem:

a) $\frac{27}{100}$ b) $\frac{15}{100}$ c) $\frac{72}{100}$ d) $\frac{81}{100}$ e) $\frac{47}{100}$

f) $\frac{50}{100}$ g) $\frac{13}{100}$ h) $\frac{2}{100}$ i) $\frac{16}{100}$ j) $\frac{5}{100}$

2. Transforme as porcentagens abaixo em frações com denominador 100:

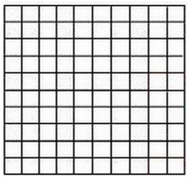
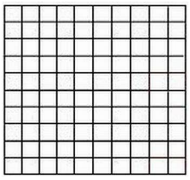
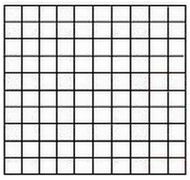
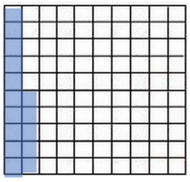
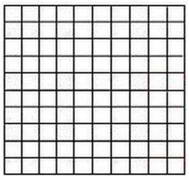
a) 23% b) 58% c) 17% d) 43%

e) 8% f) 100% g) 75% h) 20%

3. Transforma as frações abaixo em frações equivalente com denominador 100, figa a porcentagem e faça um desenho.

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{15}{20}$ e) $\frac{2}{25}$

4. Complete a tabela abaixo:

Fração com denominador 100	Fração irredutível	Porcentagem	Desenho
$\frac{100}{100}$	1	100%	
		50%	
	$\frac{3}{4}$		
			
		80%	

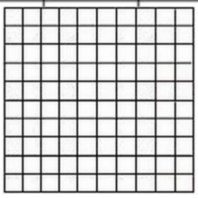
APÊNDICE O - Relação números decimais e material dourado

1) Considerando a tira como a unidade inteira, o quadradinho representa que fração do inteiro?

QUADRO POSICIONAL (ORDENS E CLASSES)						
PARTE INTEIRA				PARTE NÃO INTEIRA (DECIMAL)		
CENTENA	DEZENA	UNIDADE	,	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
C	D	U	,	d	c	m

Vamos representar no quadro posicional.

- Quantas unidades inteiras nós temos?
- Quantos décimos nós temos?



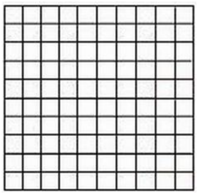
Logo, podemos concluir que,________=________=________=_______

2) Considerando a placa como a unidade inteira, o quadradinho representa que fração do inteiro?

QUADRO POSICIONAL (ORDENS E CLASSES)						
PARTE INTEIRA				PARTE NÃO INTEIRA (DECIMAL)		
CENTENA	DEZENA	UNIDADE	,	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
C	D	U	,	d	c	m

Vamos representar no quadro posicional.

- Quantas unidades inteiras nós temos?
- Quantos décimos nós temos?
- Quantos centésimos nós temos?



Logo, podemos concluir que,________=________=_______= ________

3) Considerando o bloco como a unidade inteira, o quadradinho representa que fração do inteiro?

QUADRO POSICIONAL (ORDENS E CLASSES)						
PARTE INTEIRA				PARTE NÃO INTEIRA (DECIMAL)		
CENTENA	DEZENA	UNIDADE	,	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
C	D	U	,	d	c	m

Vamos representar no quadro posicional.

- Quantas unidades inteiras nós temos?
- Quantos décimos nós temos?
- Quantos centésimos nós temos?
- Quantos milésimos nós temos?

Logo, podemos concluir que,________=________= _________________

APÊNDICE P - Exercícios com material dourado

Considere, em todas as questões a seguir, que a unidade de referência é o bloco.

1) Represente: 2 placas, 7 tiras e 4 quadradinhos

Cole o material dourado	Fração	Número Decimal
		D U , d c m

2) Represente: 2 blocos e 4 placas

Cole o material dourado	Fração	Número Decimal
		D U , d c m

3) Represente: 1 placa e 8 tiras

Cole o material dourado	Fração	Número Decimal
		D U , d c m

4) Represente: 10 placas

Cole o material dourado	Fração	Número Decimal
		D U , d c m

5) Represente: 7 placas e 5 tiras

Cole o material dourado	Fração	Número Decimal
		D U , d c m

6) Represente: 5 placas

Cole o material dourado	Fração	Número Decimal
		D U , d c m

7) Represente: 8 placas

Cole o material dourado	Fração	Número Decimal
		D | U | , | d | c | m

8) Represente: 1 bloco e 5 placas

Cole o material dourado	Fração	Número Decimal
		D | U | , | d | c | m

9) Represente: 1 placa, duas tiras e 9 quadradinhos

Cole o material dourado	Fração	Número Decimal
		D | U | , | d | c | m

10) Representa: 10 placas, 9 tiras e 8 quadradinhos

Cole o material dourado	Fração	Número Decimal
		D | U | , | d | c | m

11) Represente: 20 placas

Cole o material dourado	Fração	Número Decimal
		D | U | , | d | c | m

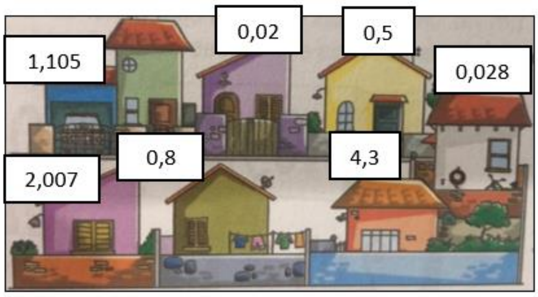
APÊNDICE Q - Exercícios números decimais

1) Utilizando o quadro ao lado, represente:

a) Cento e vinte e cinco milésimos
b) Trinta e cinco centésimos
c) Um inteiro e um décimo
d) Um inteiro e vinte e dois centésimos
e) Oito décimos
f) Oito centésimos
g) Oito milésimos
h) Cento e doze milésimos
i) Doze décimos
j) Dezenove centésimos
k) Um inteiro e seis milésimos
l) Cinquenta e dois centésimos

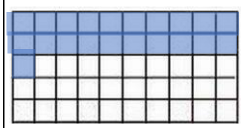
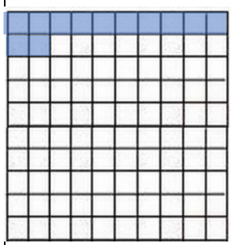
QUADRO POSICIONAL (ORDENS E CLASSES)						
PARTE INTEIRA				PARTE NÃO INTEIRA (DECIMAL)		
CENTENA	DEZENA	UNIDADE	,	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
C	D	U	,	d	c	m

2) As casas abaixo estão numeradas na forma numérica decimal. Escreva a numeração dessas casas por extenso, represente essa quantidade na forma de fração e após localize-os no quadro posicional.



QUADRO POSICIONAL (ORDENS E CLASSES)						
PARTE INTEIRA				PARTE NÃO INTEIRA (DECIMAL)		
CENTENA	DEZENA	UNIDADE	,	DÉCIMOS	CENTÉSIMOS	MILÉSIMOS
C	D	U	,	d	c	m

APÊNDICE R - Tabela de transição

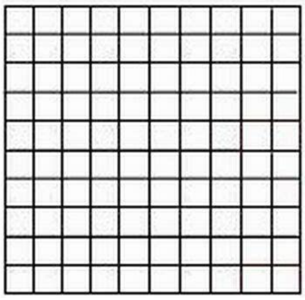
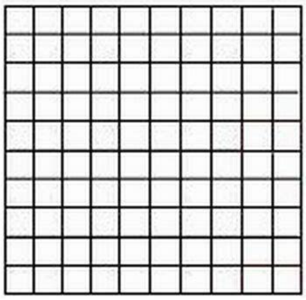
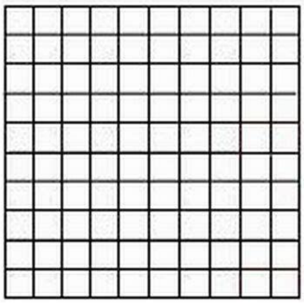
Fração de denominador 100	Fração irredutível	Porcentagem	Número decimal	Desenho
	$\frac{1}{2}$			
		40%		
$\frac{15}{100}$				
				
	$\frac{1}{10}$			
				
	$\frac{3}{4}$			

		80%		
$\frac{25}{100}$				

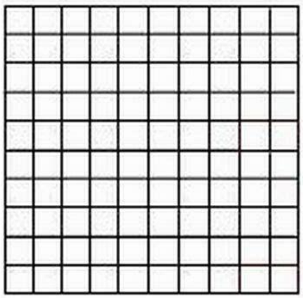
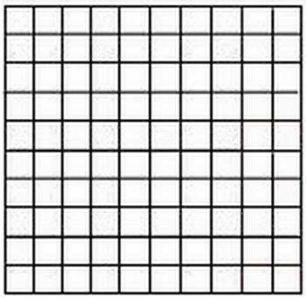
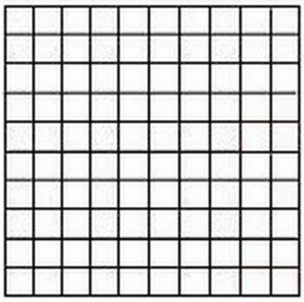
APÊNDICE S - Representação dos números racionais e transições

1) Cada um dos quadros abaixo está dividido em 100 partes iguais. Pinte a parte do quadro que corresponde as porcentagens descritas e anote a fração correspondente à representação percentual.

a) 25% = _____________ b) 50% = ______________ c) 48% = ______________

d) 75% = _______________ e) 1% = _______________ f) 2% = _______________

2) Suponha que um produto custa R$500,00 e possui um desconto de 20%. O que quer dizer um desconto de 20%? Que valor o produto custa? (Apresente o cálculo e dê a resposta completa, explicando-a.)

____
____
____
____
____
____

3) É correto afirmar que a fração $\frac{1}{2}$ representa 50%? Explique o porquê.

____
____
____
____
____

4) Se as frações equivalentes $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{12}$ forem representadas por meio de desenhos, os desenhos serão equivalentes? Demonstre e explique.

____
____
____
____
____

5) De quantas formas diferentes podemos representar os números racionais? É possível ir de uma representação para outra? Explique como.

____
____
____
____
____

6) A partir da questão número um, preencha a tabela abaixo:

	Fração Irredutível	Número Decimal	Porcentagem
a)			
b)			
c)			
d)			
e)			
f)			

7) Agora faça a representação geométrica das frações irredutíveis da questão anterior e comente o que você pensou para poder realizar essa atividade.

a) DESENHO

COMENTÁRIO

b) DESENHO

COMENTÁRIO

c) DESENHO

COMENTÁRIO

d) DESENHO

COMENTÁRIO

e) DESENHO

COMENTÁRIO

f) DESENHO

COMENTÁRIO