



# GUIA PARA ENSINO DE PRISMAS COM APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS

**Elisandra Picinin**  
**Adriano Canabarro Teixeira**

**Passo Fundo**

**2020**

CIP – Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

---

P953e Picinin, Elisandra

Guia para ensino de prismas com aprendizagem baseada em problemas [recurso eletrônico] / Elisandra Picinin. – Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, 2020.

2 MB ; PDF. – (Produtos Educacionais do PPGECEM).

Inclui bibliografia.

ISSN 2595-3672

Modo de acesso gratuito: <http://www.upf.br/ppgecem> Este material integra os estudos desenvolvidos junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECEM), na Universidade de Passo Fundo (UPF), sob orientação do Prof. Dr. Adriano Canabarro Teixeira.

1. Inovações educacionais. 2. Teoria de Van Hiele.  
3. Tecnologia educacional. 4. Aprendizagem. 5. Geometria - estudo e ensino. I. Teixeira, Adriano Canabarro. II. Título.  
IV. Série.

CDU: 372.851

---

Bibliotecária responsável Jucelei Rodrigues Domingues - CRB 10/1569

## LISTAS DE QUADROS E FIGURAS

Quadro 1 - Sólidos construídos. ....	12
Quadro 2 - Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele. ....	37
Figura 1 - Planificação do Cubo e Paralelepípedo. ....	11
Figura 2 - Planificação de Prismas. ....	11
Figura 3 - Pontos A e B na Janela de Visualização no GeoGebra 3D. ....	15
Figura 4 - Caixa para inserção do número de vértices. ....	15
Figura 5 - Polígono da base do prisma em construção. ....	16
Figura 6 - Base do prisma em construção. ....	16
Figura 7 - Prisma Hexagonal. ....	17
Figura 8 - Construção do Cubo. ....	18

## GLOSSÁRIO

**Aprendizagem baseada em problemas:** ou PBL - Problem Based Learning é uma metodologia ativa que desenvolve o conhecimento por meio de resoluções de problemas, voltadas ao mundo real, aliando a teoria da sala de aula com a prática do contexto social.

**Metodologia Ativa:** método de aprendizagem com o objetivo de estimular a participação ativa dos estudantes. O aluno é o centro da ação educacional, desenvolvendo o papel de protagonista, tem mais autonomia e é o principal responsável na construção do seu aprendizado.

**Modelo de Van Hiele:** modelo de aprendizagem de desenvolvimento do pensamento geométrico, baseado em cinco níveis, com objetivo de compreender as dificuldades de aprendizagem em Geometria apresentadas pelos seus alunos.

**Geometria Euclidiana:** Baseada nos postulados de Euclides. É a Geometria em duas e três dimensões.

**Geometria Não Euclidiana:** é uma Geometria baseada num sistema axiomático. Que pode auxiliar, por exemplo, na definição de situações geométrica sobre uma superfície curva.

**Prisma:** sólido geométrico definido no espaço tridimensional, ou seja, apresenta duas faces congruentes e paralelas chamadas base e as demais faces são laterais.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>APRESENTAÇÃO</b> .....	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>SEQUÊNCIA DIDÁTICA</b> .....	<b>8</b>
<b>2.1</b>	<b>Sequência didática com a utilização de Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL e o uso das tecnologias digitais</b> .....	<b>8</b>
2.1.1	<i>Operacionalização da sequência didática</i> .....	8
2.1.2	<i>Objetivos da sequência didática</i> .....	9
2.1.3	<i>Materiais necessários</i> .....	9
2.1.4	<i>Desenvolvimento das atividades</i> .....	9
<b>2.2</b>	<b>Primeiro Encontro</b> .....	<b>9</b>
<b>2.3</b>	<b>Segundo Encontro</b> .....	<b>13</b>
<b>2.4</b>	<b>Terceiro Encontro</b> .....	<b>19</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>23</b>
	<b>APÊNDICE A - Avaliação diagnóstica</b> .....	<b>24</b>
	<b>APÊNDICE B - Avaliação final</b> .....	<b>27</b>
	<b>APÊNDICE C - Ao Professor é Importante Saber</b> .....	<b>34</b>

## 1 APRESENTAÇÃO

Este produto educacional é um material que propõe uma sequência didática para o estudo de prismas a partir da utilização do modelo Van Hiele, aliado com Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) e com o uso das tecnologias digitais.

O modelo de Van Hiele consiste em uma teoria de ensino e aprendizagem de Geometria, onde a aprendizagem passa por níveis progressivos de pensamento. Esse modelo apresenta cinco níveis de pensamento geométrico, onde cada nível apresenta uma linguagem própria. Os conteúdos são trabalhados de forma que os alunos consigam evoluir, de um nível para o outro, visando estimular o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Os cinco níveis do pensamento geométrico de Van Hiele, a partir do texto de Jehin e Cheneu (2000), traduzido por Costa e Santos (2014), apresentam as seguintes descrições e exemplos:



**Primeiro nível – básico:** Os alunos percebem os objetos geométricos de acordo com a sua aparência física. Eles justificam suas produções por meio de considerações visuais (protótipos visuais), sem usar explicitamente as propriedades desses objetos. **Exemplo:** Os alunos consideram que, um losango é losango “porque ele está na borda”, ou uma altura é uma altura “porque é vertical”.

**Segundo nível – análise:** Os alunos são capazes de reconhecer os objetos geométricos por meio de suas propriedades. No entanto, eles usam um conjunto de propriedades necessárias para a identificação e a descrição desses objetos. **Exemplo:** Os alunos consideram que, um quadrado é um quadrado porque tem quatro lados de mesmo comprimento, quatro ângulos retos e seus lados opostos são paralelos.

**Terceiro nível – dedução informal:** Os alunos são capazes de ordenar as propriedades de objetos geométricos, construir definições abstratas, distinguir as propriedades necessárias e as propriedades suficientes para determinar um conceito e entender deduções simples. No entanto, demonstrações não estão incluídas. **Exemplo:** Os alunos consideram que, um quadrado é um quadrado porque é um retângulo com quatro lados de igual comprimento.

**Quarto nível – dedução formal:** Os alunos são capazes de entender o papel dos diferentes elementos de uma estrutura dedutiva e desenvolver demonstrações originais ou, pelo menos,

compreendê-las. **Exemplo:** Os alunos são capazes de demonstrar que, um paralelogramo que tem dois lados consecutivos de mesmo comprimento é um losango.

**Quinto nível – rigor:** Os alunos são capazes de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos e estudar várias Geometrias, na ausência de modelos concretos. **Exemplo:** Os alunos são capazes de entender Geometrias não euclidianas.<sup>1</sup>

A Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) é uma metodologia ativa e tem o objetivo de envolver os alunos, tornando-os protagonistas do processo de ensino e aprendizagem. Neste trabalho, o conteúdo será trabalhado através de resolução colaborativa de desafios e problemas, sendo que as atividades desenvolvidas serão realizadas em grupo. A PBL é um método caracterizado pelo uso de problemas do mundo real, onde os alunos investigam, discutem, criam hipóteses e tentam resolver o que lhes foi proposto.

A metodologia PBL pode ou não estar associada à utilização de recursos tecnológicos. Especificamente, nessa sequência opta-se pelo uso desses recursos, de modo a incentivar a habilidade de investigação, reflexão e criação de estratégias próprias para a resolução das atividades propostas aos alunos.

Essa proposta didática foi desenvolvida no curso de mestrado profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade de Passo Fundo, RS, sob a orientação do professor Dr. Adriano Canabarro Teixeira.

O ponto de partida foi que uma escola pretende construir uma piscina para a prática de natação, para a realização de atividades esportivas nas aulas de Educação Física. Partindo dessa situação problema, os alunos foram instigados a contribuir nesse projeto da construção da referida piscina.

A partir desta questão norteadora inicial foi pensada uma proposta que pudesse levar os alunos a desenvolver as habilidades necessárias de visualização, análise, dedução formal e informal do modelo de Van Hiele no estudo de prismas, bem como contribuir, de maneira participativa e crítica, nas resoluções de situações problemas propostos aos mesmos.

---

<sup>1</sup> **Geometria não Euclidiana:** é uma Geometria baseada num sistema axiomático distinto da Geometria Euclidiana. Modificando o axioma das paralelas, que postula que por um ponto exterior a uma reta passa exatamente uma reta paralela à inicial, obtêm-se as geometrias elíptica e hiperbólica. Fonte: Wikipédia, a enciclopédia livre, acesso em 01/07/2020.



**Sugestão ao professor:** Essa atividade pode ser adaptada e implantada para outro sólido qualquer.

As atividades deste produto educacional foram pensadas para o 3º ano do Ensino Médio, com duração prevista de 15 horas aulas. Foram aplicadas em forma de oficinas, com três encontros, ou seja, três noites.

Como descrito anteriormente, o modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico consiste em cinco níveis de compreensão. Para aplicação desta sequência atingiu-se apenas os quatro primeiros níveis, uma vez que o Nível 4: Rigor, é o caso do estudo da Geometria com outra estrutura axiomática, que não é abordada no Ensino Médio, como a Geometria não-euclidiana, o que não se pretendia explorar nesse momento.

Nesse processo é imprescindível levar em conta os conhecimentos e as experiências matemáticas já vivenciadas pelos alunos. O professor precisa criar situações de aspectos qualitativos e quantitativos da realidade.

Destaca-se que o ensino deve considerar a necessidade de vincular a escola e a vida, envolvendo os componentes curriculares, uma vez que a proposta do Ensino Médio consiste em uma visão integrada e aplicada à realidade e ao mercado do trabalho.

Inicialmente, através do modelo de Van Hiele, verificou-se em que nível de pensamento geométrico cada aluno se encontrava; posteriormente, foram propostas atividades desafiadoras, para que os alunos conseguissem progredir de nível.

A associação da PBL ao modelo de Van Hiele tem o objetivo de verificar a relação existente entre os processos envolvidos na resolução de problemas e a progressão dos alunos, nos níveis de compreensão do pensamento geométrico. Para tanto, após a aplicação desta proposta didática, espera-se que os alunos consigam compreender os conceitos de primas formulando, a partir de sua prática, conceitos mínimos referentes ao conteúdo e que os mesmos percebam a importância desses conhecimentos.

## 2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Esse capítulo trata da apresentação detalhada da sequência didática desenvolvida e validada em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio, para o estudo de prismas, a partir da utilização do modelo Van Hiele, aliado ao PBL e ao uso das tecnologias digitais.

### 2.1 Sequência didática com a utilização de Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL e o uso das tecnologias digitais

#### 2.1.1 Operacionalização da sequência didática

- Apresentar a proposta didática aos alunos;
- Organizar os grupos de trabalho;
- Relembrar conceitos de figuras geométricas planas;
- Estabelecer relação entre o número de lados da base de um prisma e o número de vértices, arestas e faces;
- Identificar as características de um prisma;
- Conhecer a planificação de alguns prismas;
- Associar as formas geométricas espaciais a objetos e elementos do cotidiano;
- Apresentar e desenvolver uma situação problema relacionada à construção de uma piscina nas dependências da escola, para a prática de aulas de natação;
- Trabalhar a resolução de problemas verificando se os alunos conseguiram compreender os conceitos construídos no decorrer das atividades propostas;
- Trabalhar, com o Geogebra, conhecimentos básicos das ferramentas dispostas na janela de visualização 2D e 3D;
- Verificar, por meio do modelo de Van Hiele, o nível de pensamento geométrico em que os alunos se encontram, antes e após a aplicação da sequência didática, analisando se os alunos progrediram ou não de nível de conhecimento.

### 2.1.2 *Objetivos da sequência didática*

- Aprofundar o conhecimento da metodologia ativa PBL, como alternativa didático-pedagógica para o ensino;
- Compreender o conteúdo de prismas, através de investigações práticas, problemas desafio e uso de tecnologias digitais, com a utilização da metodologia ativa PBL, para o ensino dos alunos de Ensino Médio.

### 2.1.3 *Materiais necessários*

Quadro, marcador para quadro, lápis, caderno, calculadora, computadores, *software* GeoGebra, trena, celular, cartolina, esquadro, réguas, projetor multimídia, atividades impressas.

### 2.1.4 *Desenvolvimento das atividades*

As atividades da sequência didática totalizam 15 horas aulas e serão desenvolvidas em 3 encontros, no turno da noite, durante as aulas regulares dos alunos.

## 2.2 **Primeiro Encontro**

No primeiro encontro será realizada uma conversa inicial e explicativa sobre a proposta a ser desenvolvida. No decorrer dessa conversa, procurar-se-á buscar o objetivo de conscientizar os alunos no sentido de que o sucesso da atividade requer, por parte deles, cooperação, interesse, interatividade, ajuda mútua e desenvolvimento do raciocínio.

**Objetivo do Encontro:** Neste encontro será apresentada a proposta didática aos alunos e organizado os grupos de trabalho. Será realizada a aplicação de um questionário para verificar, por meio do modelo de Van Hiele, o nível do pensamento geométrico em que os alunos se encontram. Os conteúdos desenvolvidos serão: conceitos de figuras geométricas planas e espaciais; prismas (características, propriedades, planificação, vértices, faces, arestas,

perímetro, área da base, área lateral e área total e volume). Para dar significado ao assunto estudado, priorizar-se-ão as formas geométricas espaciais relacionadas a objetos e a elementos do cotidiano.

**Atividade 01:** Para iniciar os trabalhos, os alunos receberão um questionário para verificar em qual nível de pensamento geométrico eles se encontram. Esse teste diagnóstico tem como objetivo verificar em qual nível de conhecimento os estudantes se encontram, segundo o Modelo de Van Hiele, o qual verifica os conhecimentos prévios que os alunos apresentam, em relação à Geometria Plana e Espacial. Após responderem ao questionário, será socializado com a turma alguns conceitos referentes à Geometria, conforme apresenta o Apêndice A.

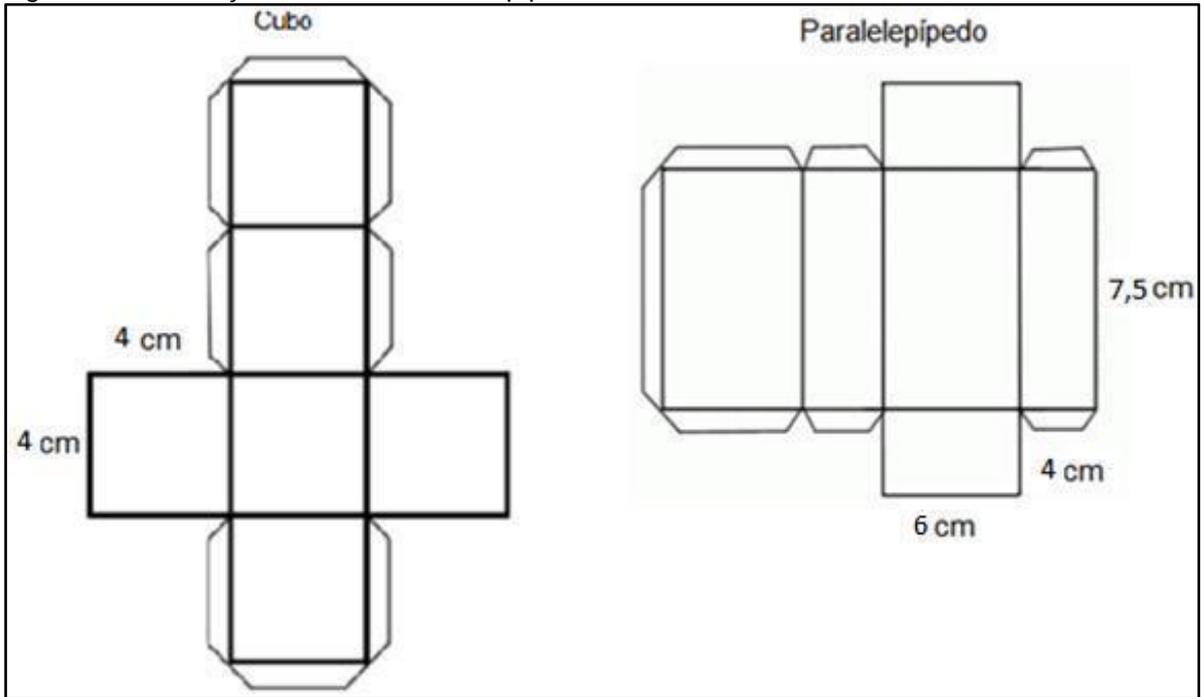
**Nota ao professor (a):** Identificar o conhecimento prévio do aluno através do diagnóstico é muito importante, praticamente indispensável. A partir disso, o professor consegue analisar qual deve ser o ponto de partida no assunto a ser estudado. Um dos objetivos de sua aplicação é conhecer as dificuldades dos alunos e fazer uma relação com o que eles sabem e com o que eles precisam aprender. Outro ponto importante é relacionar os conhecimentos prévios dos alunos em relação à formação dos conceitos geométricos em diferentes circunstâncias, tanto escolar quanto no seu meio social.



Na sequência, serão divididas as equipes de trabalho por livre escolha da turma, sendo que cada equipe deverá ser composta, no máximo, por quatro membros. Assim, as atividades propostas a seguir serão todas realizadas em equipe.

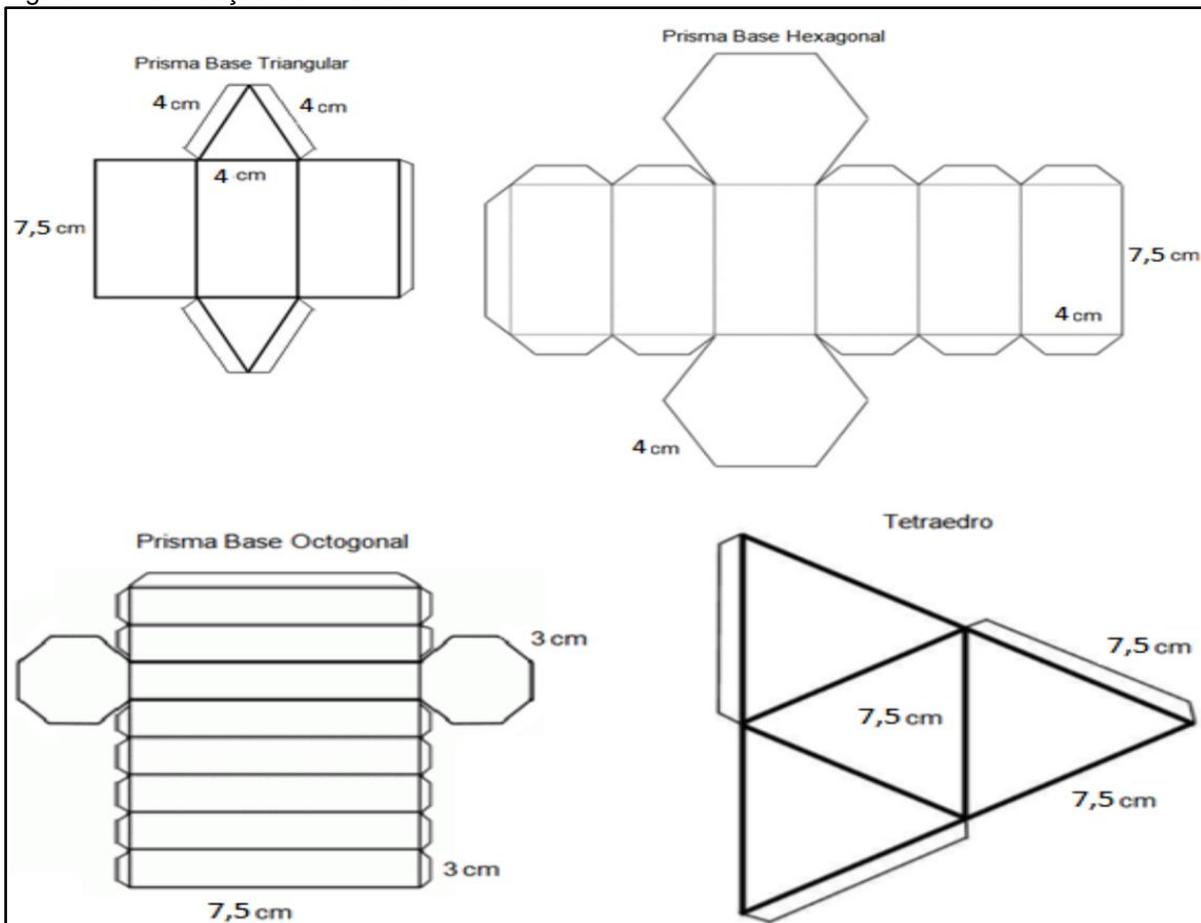
**Atividade 02:** Será entregue uma lista de modelos das planificações de alguns dos prismas, juntamente com régua, esquadros e transferidor para serem reproduzidas em cartolinas (também distribuídas), aumentando o triplo de suas medidas. Essa atividade, segundo o modelo de Van Hiele, é classificada como nível básico ou nível de visualização. Objetiva a manipulação e a identificação dos objetos apresentados, conforme apresentam as Figuras 1 e 2.

Figura 1 - Planificação do Cubo e Paralelepípedo.



Fonte: Disponível em: <<https://br.pinterest.com/patriciareisnas/moldes-png/>>.

Figura 2 - Planificação de Prismas.



Fonte: Disponível em: <<https://br.pinterest.com/patriciareisnas/moldes-png/>>.

Após a construção, passar-se-á para a fase de nomear os elementos dos sólidos geométricos. Para tanto, será preenchido o Quadro 1 e, posteriormente, discutido que figuras e propriedades emergiram dessa atividade.

Quadro 1 - Sólidos construídos.

Nome do sólido	Nº de faces	Nº de arestas	Nº de vértices	Forma da base	Formas das faces laterais	Medida dos ângulos da base	Medida dos ângulos das faces laterais

Fonte: Autores, 2019.

Em relação às figuras apresentadas anteriormente, os grupos realizam agrupamento das mesmas, levando em consideração alguma característica ou propriedade (descrevendo as propriedades/características). Se os alunos conseguirem agrupar e distinguir algumas propriedades em relação às figuras, pode-se concluir que este grupo já se encontra no nível 1, ou nível de análise.

**Atividade 03:** Após a confecção, em cartolina, dos modelos de planificação, os alunos serão desafiados a desenhar uma planificação com medidas correspondente ao quádruplo da área das figuras originais, acima relacionadas. Nessa atividade, os alunos precisam inicialmente descobrir a área das figuras originais para, conseqüentemente, conseguir encontrar o quádruplo de sua área e assim reproduzi-la. De acordo com os níveis de Van Hiele, a atividade é classificada como nível 2, ou dedução informal.

**Atividade 04:** Nesse momento, os alunos (em grupos já formados anteriormente), de posse de seus celulares, serão convidados a registrar imagens que retratam Geometria Plana e Espacial, presente nas construções, ruas, placas, ou objetos encontrados nas ruas de sua cidade. Esta atividade encontra-se no nível de observação, ou seja, no nível básico.

**Atividade 05:** As imagens registradas pelos alunos serão apresentadas para a turma e, posteriormente, discutidas com a orientação da professora. As imagens apresentadas atenderão às seguintes especificações:

- Nome da figura (objeto);
- Quantos lados, vértices, ângulos a figura possui;
- Características ou propriedades dessa figura;
- Pode-se classificar essas figuras, de que maneira;
- Qual o perímetro, área e volume dessa figura.

**Nota ao professor(a):** As atividades 04 e 05 têm o objetivo de perpassar tanto o nível básico, o nível 01 e 02 do Modelo de Van Hiele, resgatando, assim, os alunos que não conseguiram a progressão de um nível mais elevado. De acordo com as propriedades do Modelo de Van Hiele, “Se o aluno está em um certo nível e o curso num nível diferente, o aprendizado e o progresso desejado podem não se verificar”. Ou seja, se as atividades propostas anteriormente aos alunos não foram significativas, os mesmos não conseguirão acompanhar os processos de pensamento geométrico, que serão propostos na sequência.



**Atividade 06:** Com relação às imagens registradas anteriormente (fotos) de objetos geométricos, os alunos construirão três situações problemas (intermediados pela professora e usando como referência o seu livro didático), através de três imagens escolhidas pelos mesmos. As questões serão entregues à professora no final da aula.

### 2.3 Segundo Encontro

As atividades propostas neste encontro serão realizadas utilizando o *software* GeoGebra. Trata-se de um *software* livre de Matemática, com aplicativos gratuitos, o qual disponibiliza várias funções para Geometria, Álgebra, planilha, probabilidade, entre outros.

**Objetivo do Encontro:** retomar os conceitos aprendidos no primeiro encontro, e, a partir da utilização do *software* GeoGebra, apresentar aos alunos conhecimentos básicos das ferramentas dispostas na janela de visualização 2D e 3D, do GeoGebra.

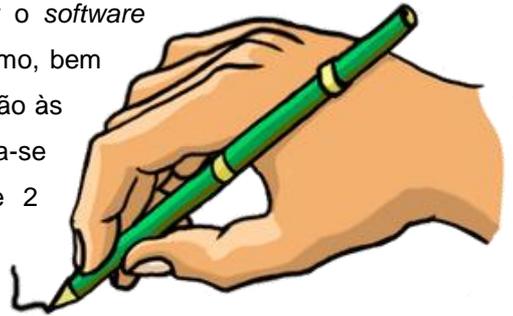
**Atividade 07:** Será apresentado aos alunos o *software* GeoGebra, onde os mesmos construirão um hexágono e um cubo para a familiarização com essa ferramenta. Nesse momento será explorado, com os alunos, os principais recursos do *software* GeoGebra.

**Nota ao professor(a):** Para que você possa conhecer o *software* GeoGebra ou ampliar seus conhecimentos sobre o mesmo, bem como obter subsídios para orientar seus alunos em relação às atividades propostas nesta sequência didática, recomenda-se acessar os materiais disponíveis nos endereços 1 e 2 abaixo:

1) <<https://www.geogebra.org/m/gxwG1NgQ>> -

Interface do GeoGebra e Construções iniciais.

2) <<https://www.geogebra.org/m/XEZPtpXD#material/DJ2wGfbc>> - Objetos e suas Propriedades.



Explorar o *software* e conhecer suas ferramentas é indispensável para o sucesso de sua utilização nas aulas. Para instalação do GeoGebra e para explorar o que ele oferece, acessar os links 3 e 4 abaixo:

3) <<https://www.geogebra.org/>> - endereço para download do *software* GeoGebra.

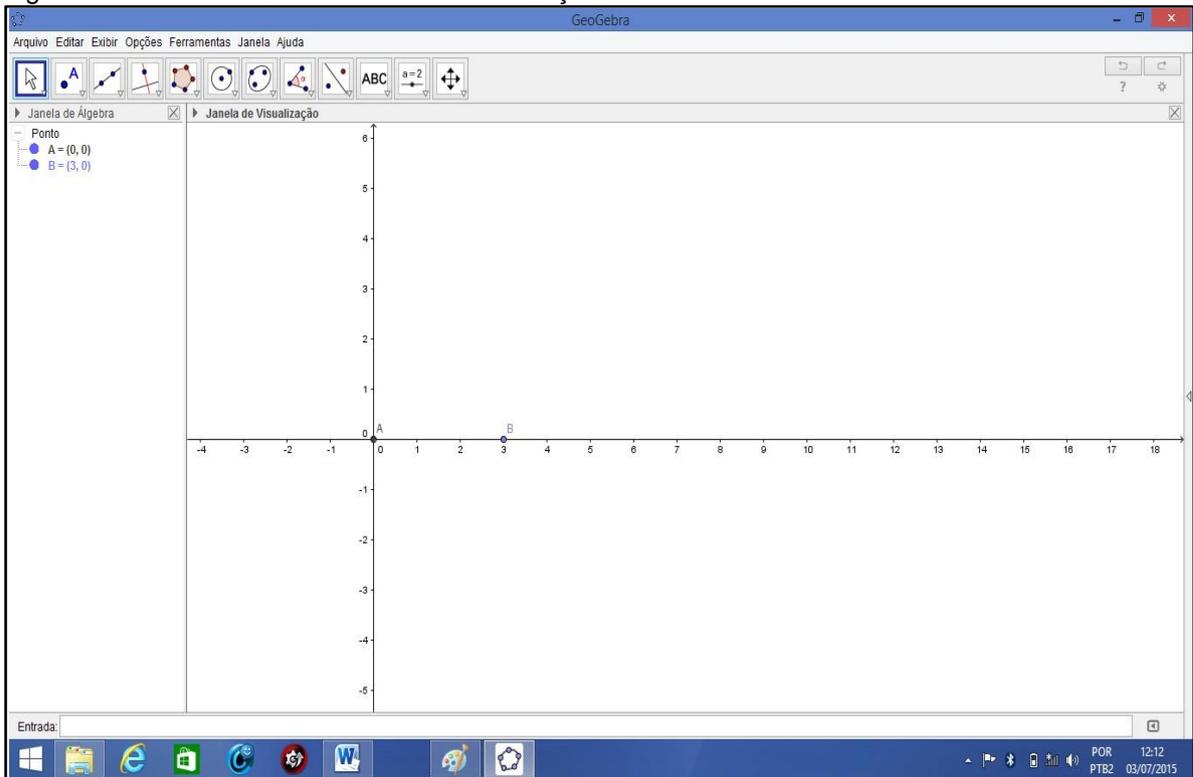
4) <<https://www.youtube.com/watch?v=PxaLuRz5mD0>> - Tutorial Geometria Espacial (Prismas) no GeoGebra 5.0 (25min18seg).

**Construção do Hexágono:** A proposta é a construção de um prisma hexagonal, regular, reto, cuja aresta da base mede 3 cm e a aresta da face lateral mede 6 cm. Usando o GeoGebra, os alunos encontrarão a área e o volume desse prisma.

Para isso, é preciso clicar na barra de Ferramentas do GeoGebra em .

Em seguida,  Polígono Regular. Na sequência, clica-se em algum lugar do plano cartesiano da Janela de Visualização, para colocar dois pontos, A e B. Para que a aresta seja igual a 3, escolhe-se esses pontos sendo um na origem dos eixos e o outro no 3 do eixo x, conforme demonstra a Figura 3.

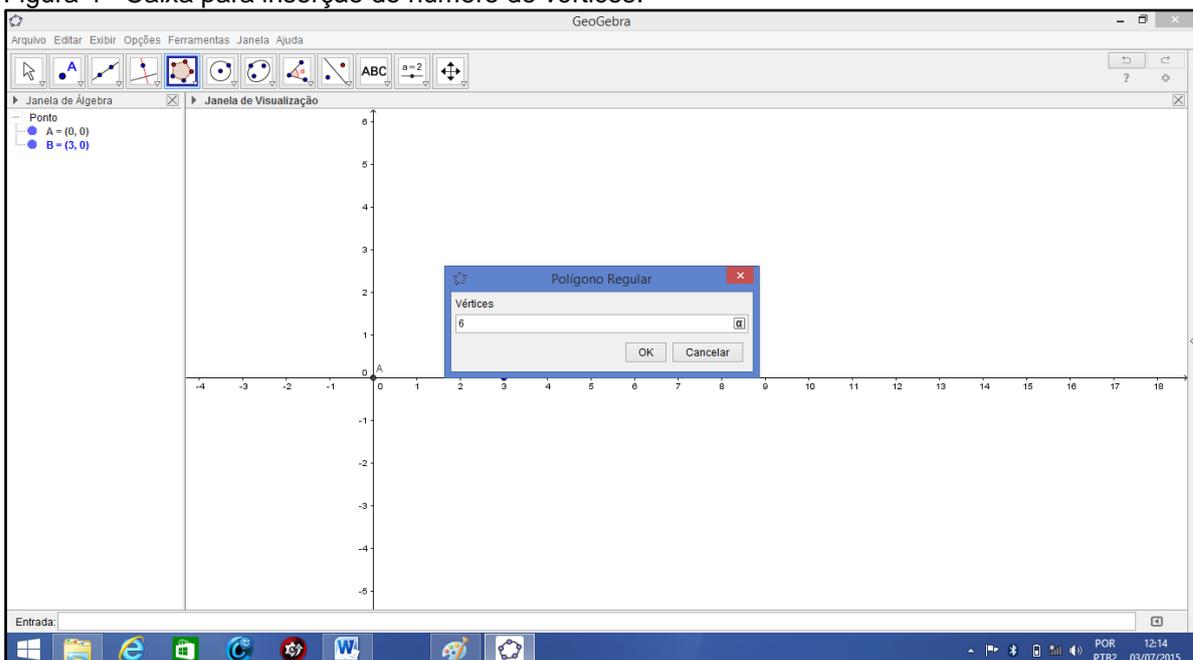
Figura 3 - Pontos A e B na Janela de Visualização no GeoGebra 3D.



Fonte: Autores, 2019.

A seguir, indica-se o número de vértices do polígono regular. Como se quer um prisma hexagonal, o número de vértice será 6. A Figura 4 apresenta esse procedimento.

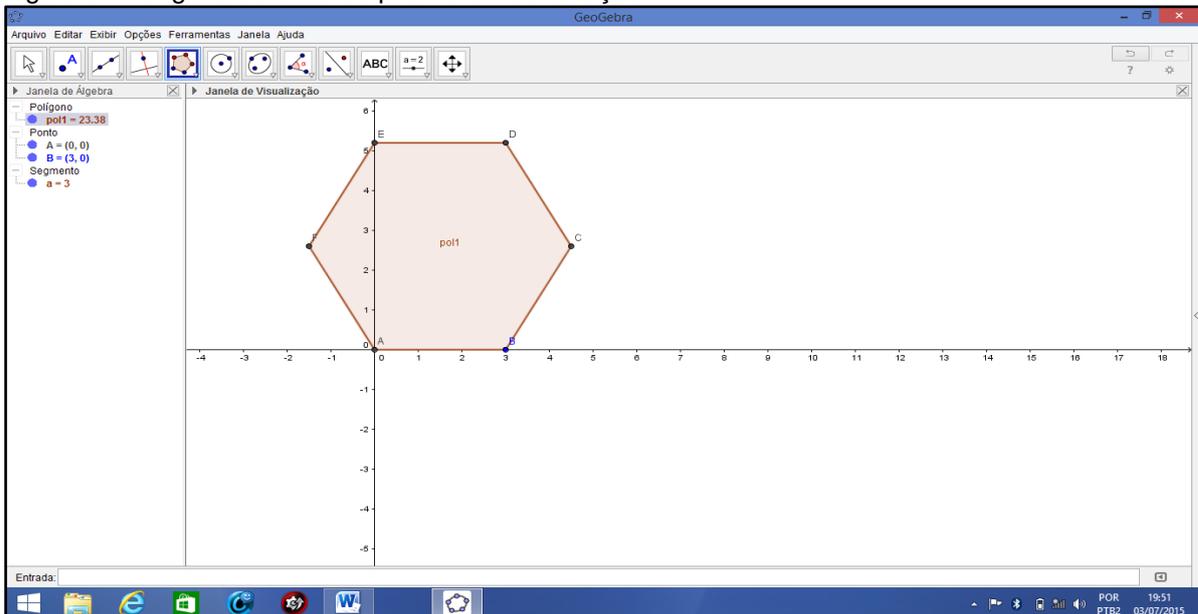
Figura 4 - Caixa para inserção do número de vértices.



Fonte: Autores, 2019.

Ao clicar em ok, o *software* mostrará o polígono da base do prisma (pol1) na Janela de Visualização, conforme a Figura 5.

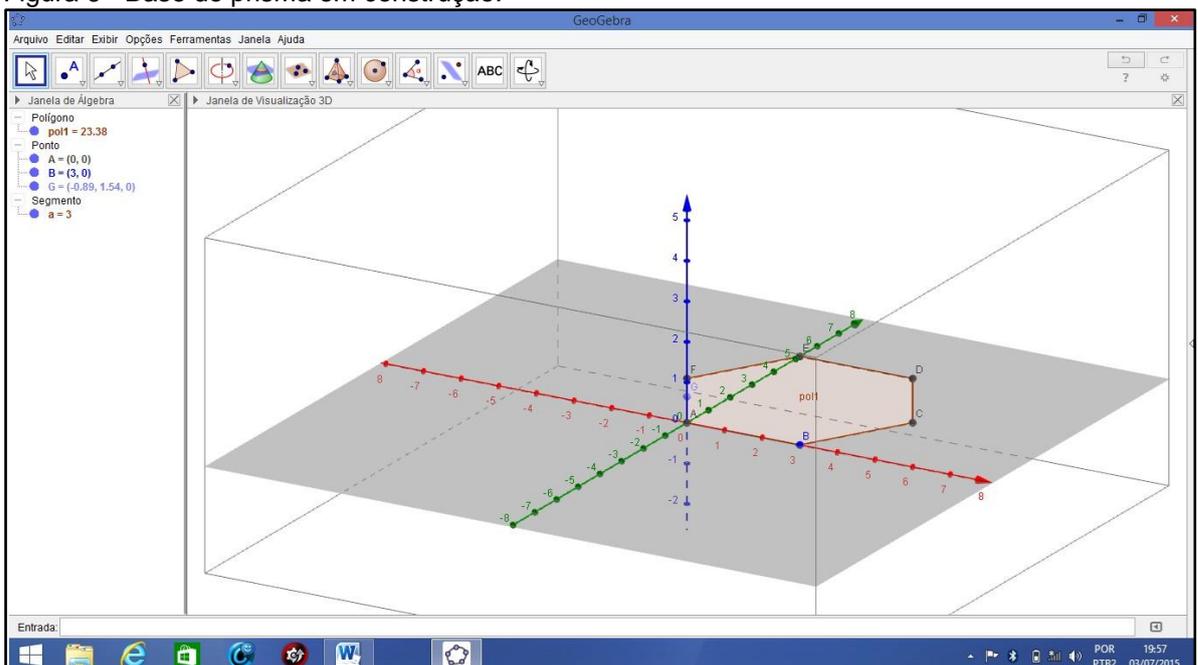
Figura 5 - Polígono da base do prisma em construção.



Fonte: Autores, 2019.

Prosseguindo, abre-se a Janela de Visualização 3D e, em seguida, fecha-se a Janela de Visualização, que foi vista na Figura 5, ficando apenas a imagem representada na Figura 6:

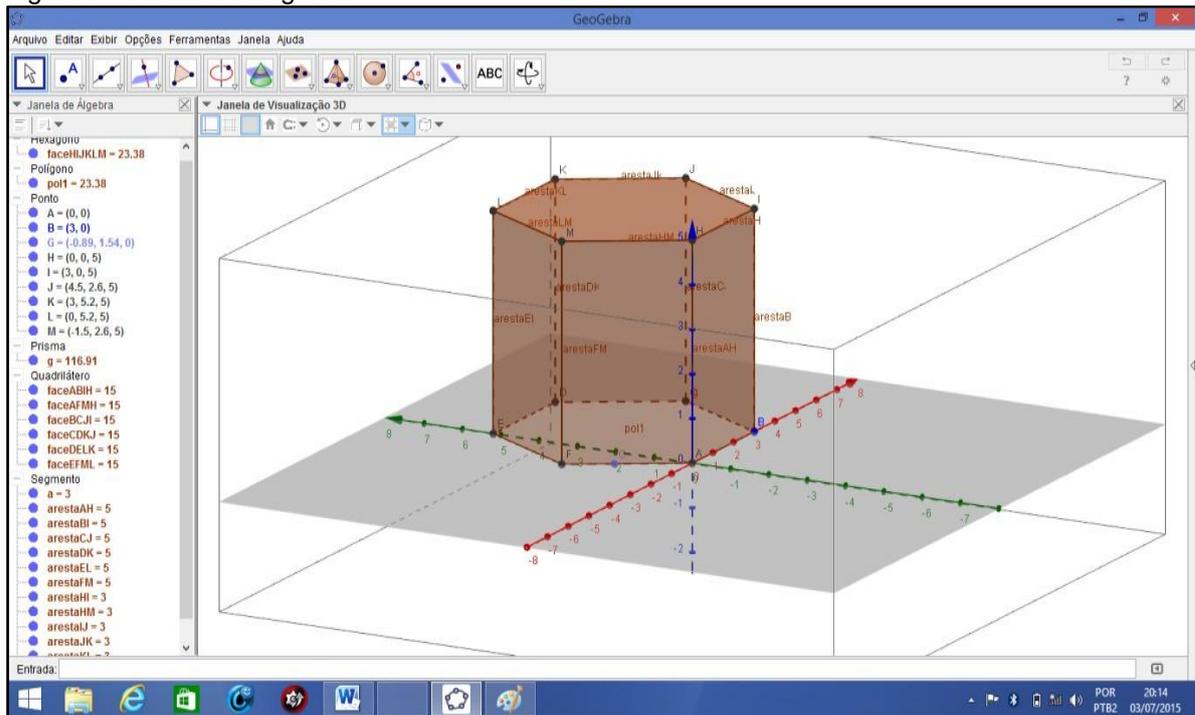
Figura 6 - Base do prisma em construção.



Fonte: Autores, 2019.

Na Barra de Ferramentas , no cone  "Extrusão para Prisma ou Cilindro" clica-se no polígono (pol1) na Janela de Visualização 3D e abrirá uma janela pedindo a altura do prisma, onde será informado 5. A Figura 7 apresenta o prisma construído.

Figura 7 - Prisma Hexagonal.

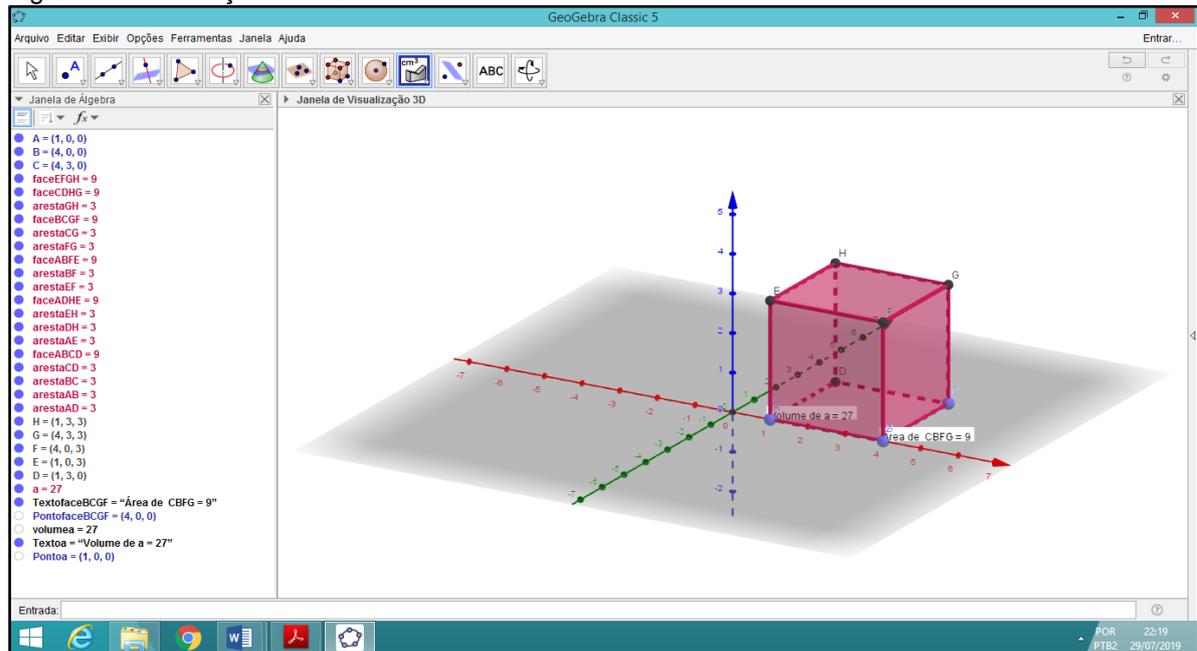


Fonte: Autores, 2019.

Na Janela de Álgebra, o programa fornecerá a área da base do prisma, o volume e a área de cada face lateral. Os quais serão apresentados e explicados aos alunos, a partir dos respectivos valores fornecidos pelo *software*.

**Construindo um cubo:** um cubo é um hexaedro regular. Tem 6 faces, 12 arestas e 8 vértices. É um caso particular de prisma, pois suas faces são iguais e quadradas. O cubo é o sólido mais simples de ser criado no *software* GeoGebra. Primeiro deve-se ativar a janela 3D e, depois na nova janela, ativar a ferramenta Cubo. Em seguida, clicar em dois pontos para a formação do cubo. Para calcular a área e o volume, basta selecionar a décima primeira janela e clicar em área. Seleciona-se a figura na janela de visualização 3D e a área é fornecida. Esse procedimento deve ser repetido para descobrir o volume. A Figura 8 demonstra esses procedimentos.

Figura 8 - Construção do Cubo.



Fonte: Autores, 2019.

**Nota ao professor(a):** Para trabalhar com a janela de visualização 3D do *software* GeoGebra e ampliar seus conhecimentos para orientar seus alunos em relação às atividades, recomenda-se assistir aos seguintes vídeos, apresentados pelo professor Dantas.

Vídeo 01 - Visualização da janela 3D - parte 1, com duração de

11min e 38s. Disponível no endereço: <<https://www.youtube.com/watch?v=yRHb56uP6qg>>.

Vídeo 02 - Visualização da janela 3D - parte 2 - Construção de prismas e pirâmides, com duração de 9min e 47s. Disponível no endereço: <<https://www.youtube.com/watch?v=DOdl7h5iZ2U>>.



As atividades 08, 09 e 10 serão desenvolvidas no GeoGebra.

**Atividade 08:** A proposta é escolher uma imagem registrada pelo próprio grupo (foto) e fazer um esboço da mesma no GeoGebra, respondendo aos seguintes itens:

- Quantidade de vértices e arestas;
- Que tipo de retas a figura apresenta;
- Qual o perímetro da figura;
- Qual a área dessa figura;
- Qual o volume dessa figura.

**Atividade 09:** A atividade propõe que os grupos desenvolvam o que é solicitado.

- a) Construir um triângulo com as seguintes medidas: 5cm, 6cm e 12cm.
- b) Construir um quadrado de medidas quaisquer e calcular sua diagonal.
- c) Construir um prisma de base triangular, calculando sua superfície total e volume.
- d) Construir um prisma de base quadrada, com as seguintes medidas: aresta da base 4cm e altura 8cm. Calcular sua área total.
- e) Com 4 vértices e 6 arestas, construir um sólido no qual de cada vértice partem 3 arestas, cujas faces têm a forma de triângulo equilátero.
- f) Com 8 vértices e 12 arestas, construir um sólido em que partem 3 arestas de cada vértice e possuir faces quadrangulares.
- g) Calcular a área de um cubo, sabendo que seu volume é  $3375 \text{ cm}^3$ .
- h) Fazer um relatório dos cálculos executados e o que foi observado com o desenvolvimento das atividades propostas.

**Atividade 10:** no endereço <<https://www.geogebra.org/m/xvq3qzd2>>, explorar as planificações dos prismas. Movimentar o controle deslizante e verificar como fica a planificação de cada um dos prismas. Observar o número de vértice, faces e arestas de cada figura para, a seguir, tirar conclusões. Nessa atividade espera-se que os alunos consigam comprovar a relação de Euler, assim, passando para o nível 3, conforme Modelo de Van Hiele.

## 2.4 Terceiro Encontro

Nesse encontro os alunos resolverão algumas situações problemas, estas relacionadas ao seu cotidiano, aplicando os conhecimentos adquiridos nos encontros anteriores. Posteriormente, será analisada a evolução do nível do pensamento geométrico de cada aluno. Espera-se que os alunos se encontrem no Nível 3: Dedução formal, do Modelo de Van Hiele. Portanto, nesse nível é preciso proporcionar aos alunos situações que estejam colocadas em um contexto, para que eles possam identificar o que já é conhecido e o que deve ser provado ou demonstrado em um problema.

**Objetivo do Encontro:** Os alunos desenvolverão uma situação problema, relacionada à construção de uma piscina nas dependências da escola, para a prática de aulas de natação. Também, resolverão problemas construídos pelos colegas, verificando se houve a compreensão dos conceitos construídos no decorrer das atividades. E, para finalizar, por meio de uma avaliação, será verificado em qual nível do pensamento geométrico os alunos se encontram, tomando por base o Modelo de Van Hiele.

**Atividade 11:** A atividade consiste na elaboração do projeto para a construção de uma piscina em uma escola, para realização de aulas de natação. A mesma receberá um recurso, no valor de R\$ 48.000,00, para a realização total da obra.

Seguem algumas informações para a execução do projeto.

- A escola apresenta espaço necessário para a construção da piscina;
- Cada grupo define as dimensões da piscina: comprimento, largura e profundidade;



De uma forma geral, o valor médio a ser investido nos materiais para uma piscina, por m<sup>2</sup>, é de R\$ 250,00. É possível estabelecer um preço médio para as piscinas de alvenaria, no geral, que fica entre R\$ 12.000,00 e R\$ 70.000,00, dependendo do tamanho, formato e tipo de fundação utilizada na piscina.

- A piscina deve ser revestida com azulejos de 20 cm x 20 cm. Verificar a quantidade de peças de azulejos necessárias;
- Quantos litros de água são necessários para encher essa piscina, e qual o gasto que a escola terá para enchê-la? (Pesquisar o valor do metro cúbico de água).
- Os grupos de trabalho são os responsáveis pela construção desse projeto. Devem escolher o local para sua construção, tamanho da piscina

e profundidade (a piscina deve ter um formato quadrangular). O azulejo para seu revestimento será de escolha do grupo, desde que seja respeitado o tamanho. Deve-se levar em consideração o valor médio de investimento por metro quadrado e o gasto com água. Calcular o valor da obra e desenhar o projeto no *software* GeoGebra.

Inicialmente, os alunos fotografarão e medirão o local onde a piscina deverá ser construída. Para essa tarefa será solicitado aos alunos a utilização de seus celulares. Além da utilização do celular, cada equipe receberá também uma trena para realizar as medições do espaço escolhido.

Na sequência, as fotos serão compartilhadas com toda a turma e os grupos justificarão a escolha do espaço. Será realizada uma conversa com os alunos, com os seguintes questionamentos:

- Que sólido foi formado?
- Quais os dados que o problema forneceu?
- O que o problema pediu que fosse calculado?
- Com o que está relacionado o custo total da piscina?
- Qual o comprimento, a largura e a profundidade da piscina? E quais letras poderiam ser utilizadas para representar essas variáveis?
- Como calcular a quantidade de azulejos utilizados nessa construção?
- Como calcular a área total da piscina e a quantidade de água suficiente para enchê-la?
- Com que unidade de medidas foi trabalhado?

Após os questionamentos, os alunos escolherão entre o grupo um relator, para descrever as seguintes etapas para a execução do projeto:

Etapa 1: Compreendendo o problema;

Etapa 2: Estabelecimento de um plano;

Etapa 3: Execução do plano;

Etapa 4: Apresentação da resolução.

Para a culminância dessa atividade, os alunos apresentarão para a classe qual foi o plano escolhido pelo grupo, sua execução e as devidas resoluções.

**Atividade 12:** resolver situações problemas criadas por eles no primeiro encontro. Cada grupo criará três problemas, a partir das imagens registradas.

Será selecionado um problema por grupo, criando assim uma lista com oito exercícios para serem resolvidos. O objetivo dessa atividade é verificar se os alunos conseguem aplicar os conceitos de Geometria Espacial aprendidos, conseqüentemente, avançar nos níveis do Modelo Van Hiele.

**Atividade 13:** Para finalizar, os alunos resolverão situações problemas. Questões essas propostas pela Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP e ENEM (questões do período de 2015 a 2018), objetivando verificar se houve aprendizado. As atividades serão realizadas de forma individual, as quais se encontram no Apêndice B.

## REFERÊNCIAS

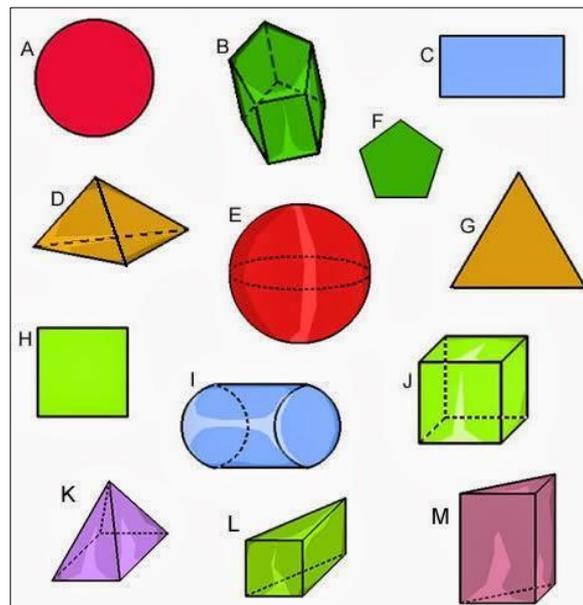
- GEOGEBRA. *GeoGebra: aplicativos matemáticos*. Download do *Software*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 15 jul. 2019.
- GEOGEBRA. *Interface do GeoGebra e construções iniciais*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/gxwG1NgQ>>. Acesso em: 15 jul. 2019.
- GEOGEBRA. *Objetos e suas Propriedades*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/XEZPtpXD#material/DJ2wGfbc>>. Acesso em: 15 jul. 2019.
- GEOGEBRA. *Planificações dos Prismas*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/m/xvq3qzd2>>. Acesso em: 17 jul. 2019.
- INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. *Provas e Gabaritos do ENEM*. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. *Aprendendo e ensinando Geometria*. Tradução de Hygino H. Domingues. 4. reimpressão. São Paulo: Atual, 1998.
- MOLDES de planificações. *Prisma*. Disponível em: <<https://br.pinterest.com/patriciareisnas/moldes-png/>>. Acesso em: 15 jul. 2019.
- OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. *Portal da Obmep*. Disponível em: <<https://portaldosaber.obmep.org.br>>. Acesso em: 25 jul. 2019.
- TUTORIAL GEOGEBRA. *Visualização da janela 3D do GeoGebra - parte 1*. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=yRHb56uP6q>>. Acesso em: 17 jul. 2019.
- TUTORIAL GEOGEBRA. *Visualização da janela 3D do GeoGebra - parte 2*. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=DOdl7h5iZ2U>>. Acesso em: 17 jul. 2019.

## APÊNDICE A - Avaliação diagnóstica

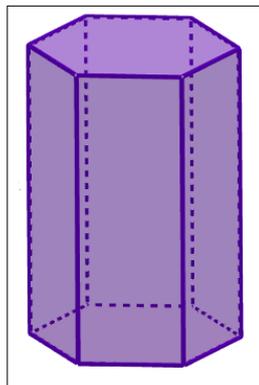
1) Quando se observa ao redor podem-se notar formas e sólidos geométricos. Cite alguns deles.

2) Você considera importante o uso de materiais manipulativos em sala de aula para sua aprendizagem no conteúdo de Geometria espacial? Por quê?

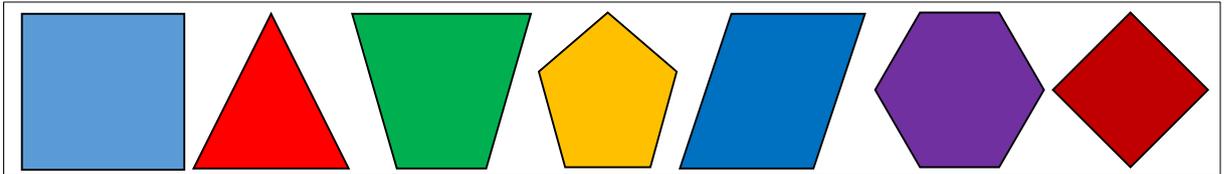
3) Geometria Espacial é o estudo da Geometria no espaço, onde se estudam as figuras que possuem três dimensões. No quadro a seguir, assinale com um x as formas geométricas espaciais.



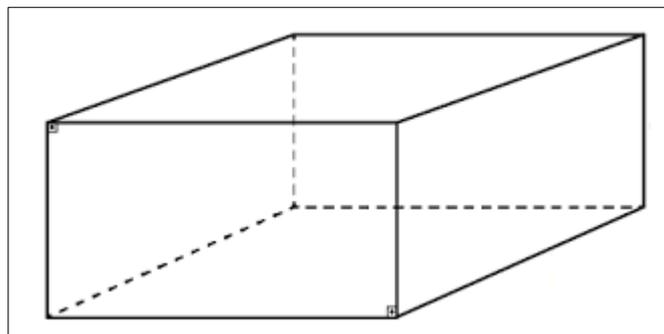
4) Quais formas geométricas planas você observa na composição do prisma abaixo?



5) Escreva o nome de cada figura, o número de faces, vértices, arestas e ângulos?



6) Foi construída com cartolinas recortadas em dois tamanhos e fita crepe, a seguinte figura:



a) Quantas peças de cartolina de cada tamanho foram necessárias para formar este sólido geométrico?

b) A fita crepe foi utilizada para prender as peças de cartolina. Considerando que a peça menor tem 2 cm de largura e 3 cm de comprimento e que a peça maior tem 3 cm de largura e 6 cm de comprimento, qual a quantidade aproximada de fita crepe utilizada?

07) A figura abaixo representa duas salas divididas em quadrados.

Imagem representada sem as divisórias (paredes internas) das salas.

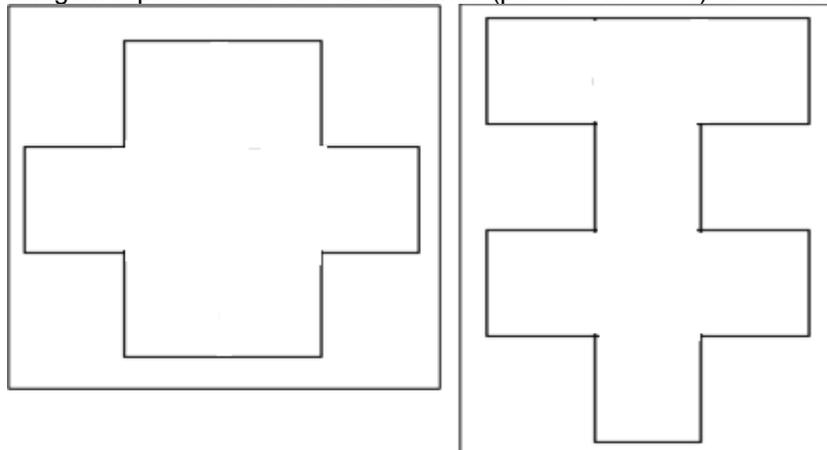
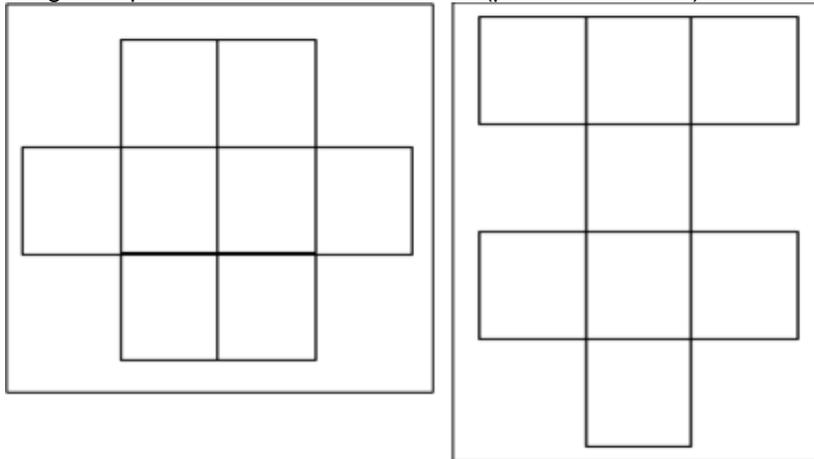
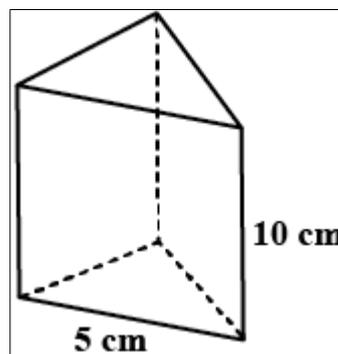


Imagem representada com as divisórias (paredes internas) das salas



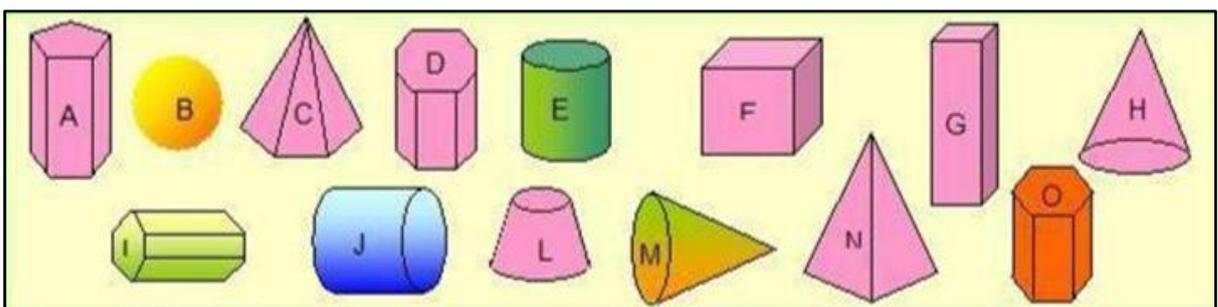
- a) Se colocarmos rodapé nas salas, a quantidade de material necessário será igual para ambas?
- b) Se for colocado piso nas salas, qual delas ocupará uma maior quantidade de cerâmicas?

08) Você consegue definir qual é a área e o volume da seguinte figura.



09) Diferencie figuras planas de sólidos geométricos, descrevendo suas características.

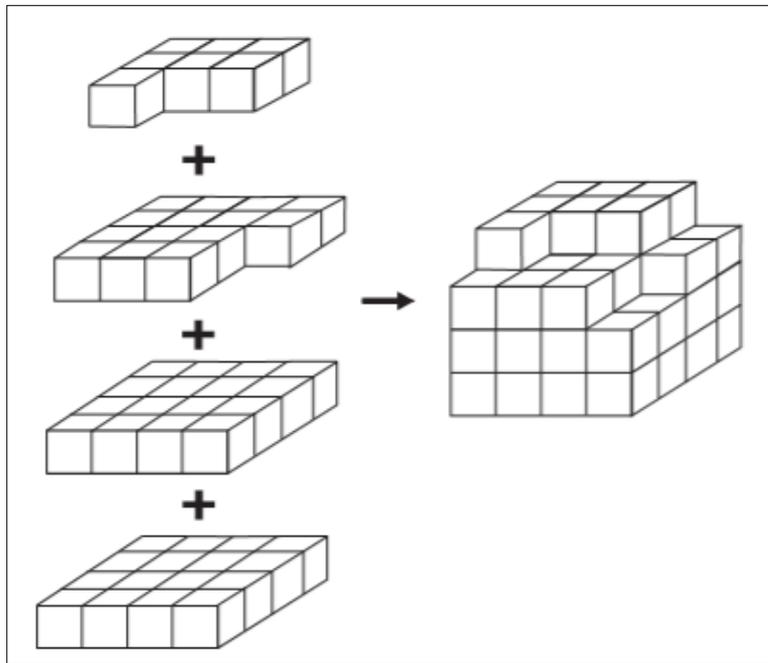
10) Observe os sólidos geométricos abaixo. Crie uma característica que os diferencie (cite esta). Agrupe os mesmos conforme esta característica.



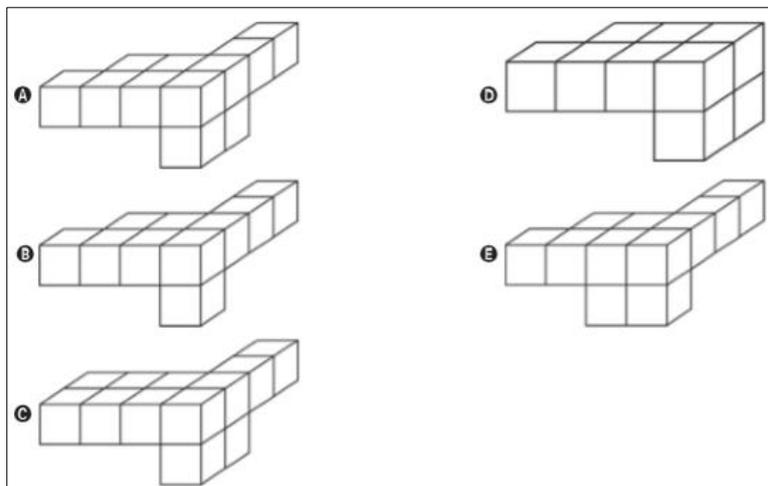
## APÊNDICE B - Avaliação final

(ENEM 2018) Minecraft é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos.

Um jogador deseja construir um cubo com dimensões  $4 \times 4 \times 4$ . Ele já empilhou alguns dos cubinhos necessários conforme a figura:

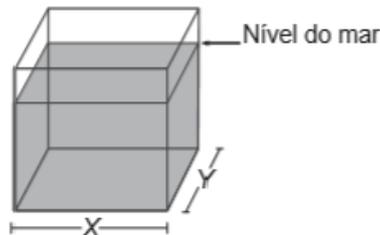


Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos formam uma peça única, capaz de completar a tarefa. O formato da peça capaz de completar o cubo  $4 \times 4 \times 4$  é:



## ENEM 2017

Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de X e de Y, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

- A 1 e 49
- B 1 e 99
- C 10 e 10
- D 25 e 25
- E 50 e 50

## ENEM 2017

Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme Figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na Figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.



Figura 1

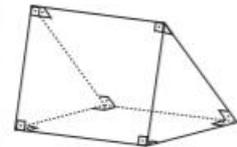


Figura 2

ROMERO, L. Tendências. *Superinteressante*, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

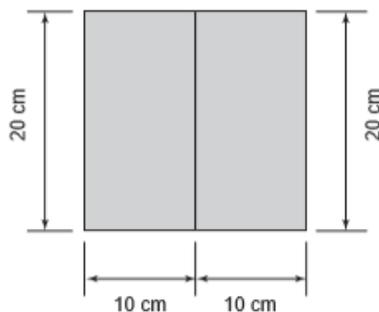
A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na Figura 2 é

- A tetraedro.
- B pirâmide retangular.
- C tronco de pirâmide retangular.
- D prisma quadrangular reto.
- E prisma triangular reto.

## ENEM 2015

Um agricultor vive da plantação de morangos que são vendidos para uma cooperativa. A cooperativa faz um contrato de compra e venda no qual o produtor informa a área plantada.

Para permitir o crescimento adequado das plantas, as mudas de morango são plantadas no centro de uma área retangular, de 10 cm por 20 cm, como mostra a figura.



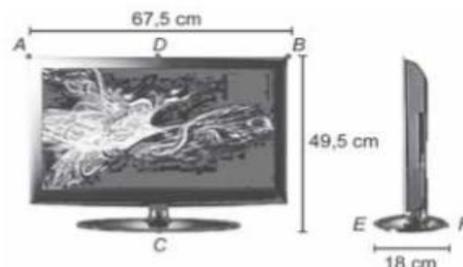
Atualmente, sua plantação de morangos ocupa uma área de 10 000 m<sup>2</sup>, mas a cooperativa quer que ele aumente sua produção. Para isso, o agricultor deverá aumentar a área plantada em 20%, mantendo o mesmo padrão de plantio.

O aumento (em unidade) no número de mudas de morango em sua plantação deve ser de

- A 10 000.
- B 60 000.
- C 100 000.
- D 500 000.
- E 600 000.

## ENEM 2015

Uma empresa especializada em embalagem de papelão recebeu uma encomenda para fabricar caixas para um determinado modelo de televisão, como o da figura.



A embalagem deve deixar uma folga de 5 cm em cada uma das dimensões. Esta folga será utilizada para proteger a televisão com isopor. O papelão utilizado na confecção das caixas possui uma espessura de 0,5 cm.

A empresa possui 5 protótipos de caixa de papelão, na forma de um paralelepípedo reto-retângulo, cujas medidas externas: comprimento, altura e largura, em centímetro, são respectivamente iguais a:

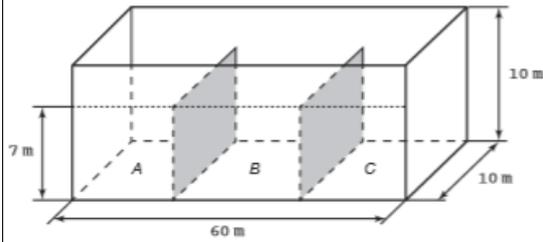
- Caixa 1: 68,0 × 50,0 × 18,5
- Caixa 2: 68,5 × 50,5 × 19,0
- Caixa 3: 72,5 × 54,5 × 23,0
- Caixa 4: 73,0 × 55,0 × 23,5
- Caixa 5: 73,5 × 55,5 × 24,0

O modelo de caixa de papelão que atende exatamente as medidas das dimensões especificadas é a

- A caixa 1.
- B caixa 2.
- C caixa 3.
- D caixa 4.
- E caixa 5.

## ENEM 2015

Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisorias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

- A  $1,4 \times 10^3 \text{ m}^3$
- B  $1,8 \times 10^3 \text{ m}^3$
- C  $2,0 \times 10^3 \text{ m}^3$
- D  $3,2 \times 10^3 \text{ m}^3$
- E  $6,0 \times 10^3 \text{ m}^3$

## ENEM 2016

Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

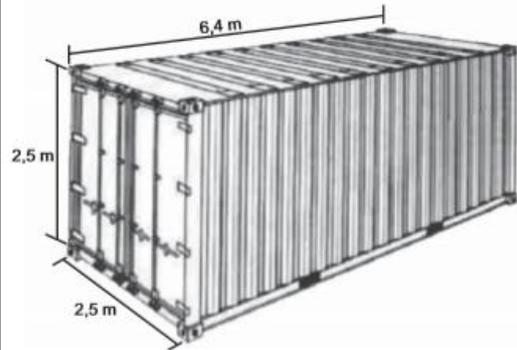


Figura 1

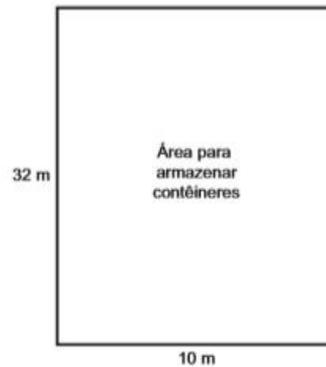


Figura 2

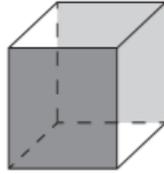
De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

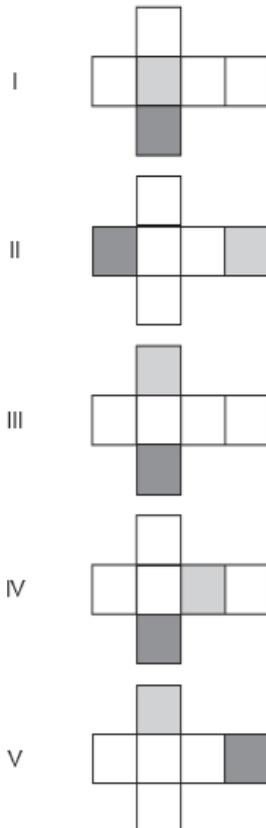
- A 12,5 m.
- B 17,5 m.
- C 25,0 m.
- D 22,5 m.
- E 32,5 m.

## ENEM 2018

Uma empresa que embala seus produtos em caixas de papelão, na forma de hexaedro regular, deseja que seu logotipo seja impresso nas faces opostas pintadas de cinza, conforme a figura:



A gráfica que fará as impressões dos logotipos apresentou as seguintes sugestões planificadas:

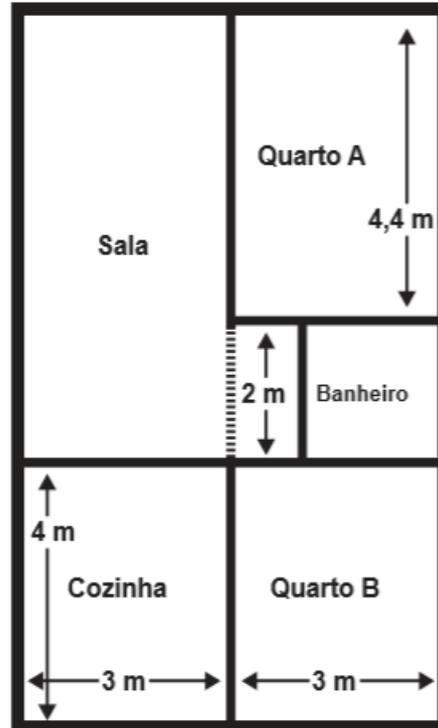


Que opção sugerida pela gráfica atende ao desejo da empresa?

- A I
- B II
- C III
- D IV
- E V

## ENEM 2017

A figura traz o esboço da planta baixa de uma residência. Algumas medidas internas dos cômodos estão indicadas. A espessura de cada parede externa da casa é 0,20 m e das paredes internas, 0,10 m.



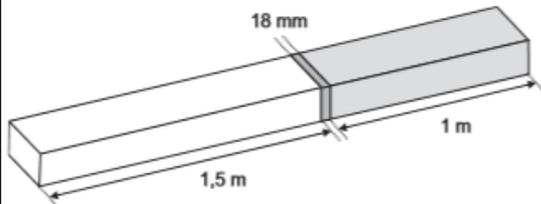
Sabe-se que, na localidade onde se encontra esse imóvel, o Imposto Predial Territorial Urbano (IPTU) é calculado conforme a área construída da residência. Nesse cálculo, são cobrados R\$ 4,00 por cada metro quadrado de área construída.

O valor do IPTU desse imóvel, em real, é

- A 250,00.
- B 250,80.
- C 258,64.
- D 276,48.
- E 286,00.

## ENEM 2015

Atendendo à encomenda de um mecânico, um soldador terá de juntar duas barras de metais diferentes. A solda utilizada tem espessura de 18 milímetros, conforme ilustrado na figura.

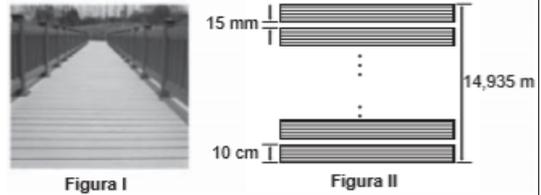


Qual o comprimento, em metros, da peça resultante após a soldagem?

- A) 2,0230
- B) 2,2300
- C) 2,5018
- D) 2,5180
- E) 2,6800

## ENEM 2015

Um marceneiro recebeu a encomenda de uma passarela de 14,935 m sobre um pequeno lago, conforme a Figura I. A obra será executada com tábuas de 10 cm de largura, que já estão com o comprimento necessário para instalação, deixando-se um espaçamento de 15 mm entre tábuas consecutivas, de acordo com a planta do projeto na Figura II.

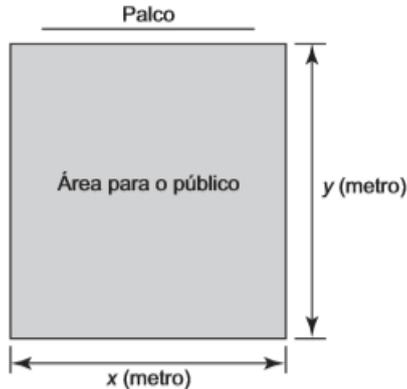


Desconsiderando-se eventuais perdas com cortes durante a execução do projeto, quantas tábuas, no mínimo, o marceneiro necessitará para a execução da encomenda?

- A) 60
- B) 100
- C) 130
- D) 150
- E) 598

## ENEM 2018

Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para shows e eventos, conforme a figura.



A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R\$ 20,00;
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R\$ 5,00.

A empresa dispõe de R\$ 5 000,00 para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público.

A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é

- A) 50,0 m da tela tipo A e 800,0 m da tela tipo B.
- B) 62,5 m da tela tipo A e 250,0 m da tela tipo B.
- C) 100,0 m da tela tipo A e 600,0 m da tela tipo B.
- D) 125,0 m da tela tipo A e 500,0 m da tela tipo B.
- E) 200,0 m da tela tipo A e 200,0 m da tela tipo B.

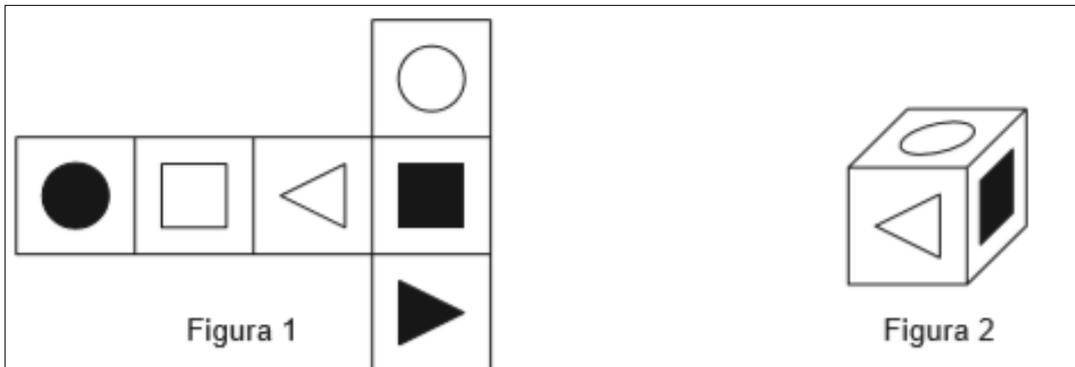
## OBMEP 2017

Zequinha tem três dados iguais, com letras O, P, Q, R, S e T em suas faces. Ele juntou esses dados como na figura, de modo que as faces em contato tivessem a mesma letra. Qual é a letra na face oposta à que tem a letra T?

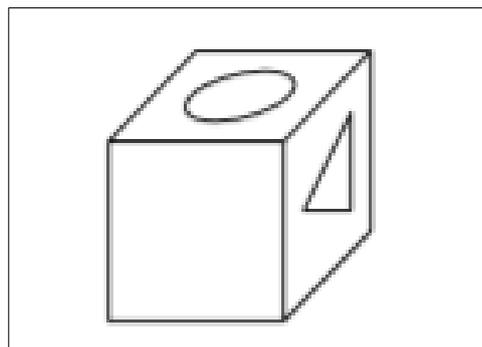
- A) S
- B) R
- C) Q
- D) P
- E) O



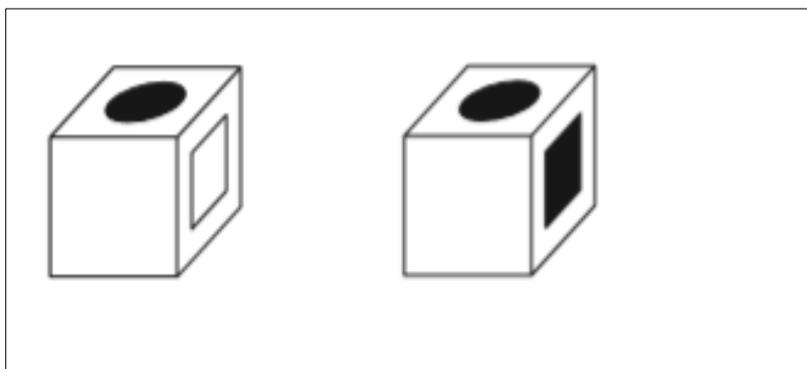
OBMEP 2019 - A Figura 1 é uma planificação de um cubo. Fazendo as dobras necessárias e colando as arestas soltas, obtemos o cubo da Figura 2.



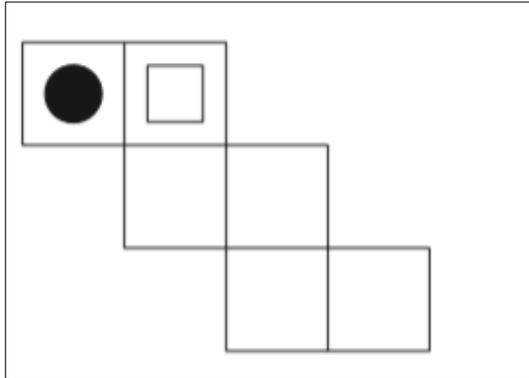
a) Em uma outra vista do mesmo cubo, mostrada abaixo, está faltando o desenho na face da frente. Faça esse desenho.



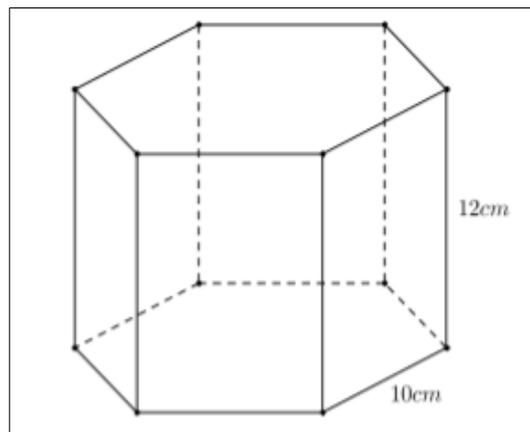
b) Abaixo temos outras duas vistas do mesmo cubo, cada uma com a face da frente sem desenho. Faça os desenhos que faltam nessas faces.



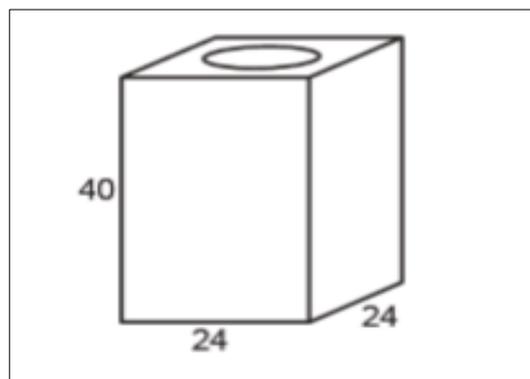
c) Abaixo temos uma outra planificação do mesmo cubo. Faça, nessa planificação, os desenhos que estão faltando.



Precisamos confeccionar a tampa para a caixa de presente abaixo. Qual a quantidade de material gasto para sua confecção, sabendo que a altura da tampa é de 5 cm?



Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostrados na figura. Qual a capacidade de tinta em litros que cabem nessa lata?



## **APÊNDICE C - Ao Professor é Importante Saber**

### **AO PROFESSOR É IMPORTANTE SABER**

#### **Metodologia ativa baseada na resolução de problemas (PBL)**

De acordo com Moraes (2006) e Mamede (2001), a Aprendizagem Baseada em Problemas – PBL, é uma perspectiva de ensino e aprendizagem fundamentada no construtivismo. Os conhecimentos precisam ser (re)construídos e o processo de aprendizagem é centrado no estudante.

Ainda, conforme os autores, a aprendizagem necessita ser orientada para a compreensão e a resolução dos problemas apresentados. O aluno é o sujeito ativo e o professor atua como mediador, auxiliando o aluno a alcançar seus objetivos no processo de aprendizagem.

Outra característica desta metodologia em questão é fazer com que os estudantes aprendam, de forma colaborativa e através de desafios. As soluções a serem exploradas pelo professor podem contar com a utilização de tecnologia, recurso esse que incentiva a habilidade de investigar, (re)criar, comparar e analisar uma determinada situação.

Segundo Woods (1996), com a aplicação da PBL, os alunos devem desempenhar as oito tarefas seguintes:

1. Explorar o problema, levantar hipóteses, identificar e elaborar as questões de investigação;
2. Tentar solucionar o problema com o que se sabe, observando a pertinência do seu conhecimento atual;
3. Identificar o que não se sabe e o que é preciso saber para solucionar o problema;
4. Priorizar as necessidades de aprendizagem, estabelecer metas e objetivos de aprendizagem e alocar recursos de modo a saber o que, quanto e quando é esperado e, para a equipe, determinar quais tarefas cada um fará;
5. Planejar, delegar responsabilidades para o estudo autônomo da equipe;

6. Compartilhar o novo conhecimento eficazmente, de modo que todos os membros aprendam os conhecimentos pesquisados pela equipe;
7. Aplicar o conhecimento para solucionar o problema;
8. Avaliar o novo conhecimento, a solução do problema e a eficácia do processo utilizado e refletir sobre o processo.

O trabalho em equipe é fundamental na aplicação dessa metodologia. De acordo com Freitas (2015), a cooperação e a colaboração são atitudes essenciais à formação do ser humano. A escola precisa estimular essa prática, objetivando o crescimento e o fortalecimento do trabalho em sala de aula.

Portanto, conforme Woods (1996), a utilização da PBL consiste no seguinte: inicialmente o professor forma as equipes de trabalho, apresenta um desafio ou propõe um problema. As equipes precisam tentar solucionar o problema proposto com os conhecimentos que possuem. Após a organização de suas ideias, os alunos socializam, discutem com a classe e anotam questões relacionadas ao problema, levando em consideração o que compreenderam, o que não compreenderam, o que sabem a respeito e o que precisam saber.

Após partilharem suas descobertas, dificuldades e saberes com a classe, o grupo novamente explora as questões de aprendizagem, integrando os novos conhecimentos ao contexto do problema, planejam e criam estratégias de investigação para solucionar o que lhes foi proposto.

Terminando o trabalho e chegando à solução do problema, os alunos podem vir a definir novas questões de aprendizagem à medida que progredem neste processo. Para finalizar, os alunos avaliam seus pares e a si mesmos com o objetivo de desenvolver a habilidade de auto avaliação para construir uma aprendizagem autônoma e eficaz.

Nesse processo, o papel do professor é muito importante. Ele será o responsável por elencar uma situação problema que instigue e leve o aluno a uma inquietação, um desequilíbrio, que de fato o estimule a querer resolvê-lo. Portanto, a escolha do problema é o ponto principal, que deve ser cuidadosamente escolhido e mediado pelo professor.

O professor assume o papel de mediador, provocador, instiga o aluno a buscar as soluções, precisa intermediar e saber a hora de interferir no processo. Deve dar retorno através de *feedback*, fazendo com que os alunos percebam onde

cometeram erros e acertos através do caminho que escolheram para chegar ao resultado. Essa reflexão contribuirá para a construção do conhecimento, estimulando a crítica e a autonomia dos jovens.

De acordo com Paiva (2016), para elaborar os problemas devem ser observados alguns critérios: não devem ser muito simples nem muito complexos; devem conter situações próximas da realidade dos alunos; devem ter um contexto próximo ao que pode ser encontrado na prática; devem permitir a discussão, não se restringindo a perguntas e respostas diretas.

Com a utilização da PBL é dado ao aluno o direcionamento. Ele precisa aprender a analisar, refletir, investigar, buscar alternativas e produzir conhecimentos relevantes, tornando-se participante ativo no processo de aprendizagem.

### **Teoria de Van Hiele: desenvolvimento do pensamento geométrico**

A Teoria de Van Hiele é estruturada em cinco níveis: Nível Básico ou zero: Reconhecimento ou Visualização; Nível 1: Análise; Nível 2: Síntese ou Abstração; Nível 3: Dedução e Nível 4: Rigor. De acordo com esse modelo, o aluno só avança para o próximo nível após ter passado pelo nível anterior, ou seja, ter compreendido o nível anterior.

É necessário, inicialmente um pré-teste para verificar em que nível de pensamento o aluno se encontra. Para que o aluno progrida para o próximo nível é extremamente importante que o professor apresente atividades significativas, que sejam bem elaboradas, (re)estruturadas e (re)organizadas, a fim de (re)construir o pensamento geométrico. Portanto, destaca-se que para a promoção de um nível  $(n+1)$  do pensamento geométrico, é fundamental a vivência com atividades adequadas, que ao serem trabalhadas em sala de aula, favoreçam a aprendizagem geométrica.

O Quadro 1, apresentado a seguir, faz relação aos 5 níveis do pensamento geométrico de Van Hiele. O mesmo foi organizado a partir do texto de Jehin e Chenu (2000), traduzido por Costa e Santos (2014).

Quadro 2 - Níveis de pensamento geométrico de Van-Hiele.

NÍVEL	DESCRIÇÃO	EXEMPLO
<b>Primeiro nível - básico</b>	Os alunos percebem os objetos geométricos de acordo com a sua aparência física. Eles justificam suas produções por meio de considerações visuais (protótipos visuais), sem usar explicitamente as propriedades desses objetos.	Os alunos consideram que, um losango é losango “porque ele está na borda”, ou uma altura é uma altura “porque é vertical”.
<b>Segundo nível - análise</b>	Os alunos são capazes de reconhecer os objetos geométricos por meio de suas propriedades. No entanto, eles usam um conjunto de propriedades necessárias para a identificação e a descrição desses objetos.	Os alunos consideram que, um quadrado é um quadrado porque tem quatro lados de mesmo comprimento, quatro ângulos retos e seus lados opostos são paralelos.
<b>Terceiro nível - dedução informal</b>	Os alunos são capazes de ordenar as propriedades de objetos geométricos, construir definições abstratas, distinguir as propriedades necessárias e as propriedades suficientes para determinar um conceito e entender deduções simples. No entanto, demonstrações não estão incluídas.	Os alunos consideram que, um quadrado é um quadrado porque é um retângulo com quatro lados de igual comprimento.
<b>Quarto nível - dedução formal</b>	Os alunos são capazes de entender o papel dos diferentes elementos de uma estrutura dedutiva e desenvolver demonstrações originais ou, pelo menos, compreendê-las.	Os alunos são capazes de demonstrar que, um paralelogramo que tem dois lados consecutivos de mesmo comprimento é um losango.
<b>Quinto nível - rigor</b>	Os alunos são capazes de trabalhar em diferentes sistemas axiomáticos e estudar várias Geometrias, na ausência de modelos concretos.	Os alunos são capazes de entender Geometrias não euclidianas.

Fonte: Adaptado por Costa e Santos, 2014, p. 5.

Cada nível apresenta uma característica distinta de compreensão e todos são importantes. É fundamental que o professor consiga desenvolver, de forma ordenada e gradual, cada um deles, apresentando aos alunos uma proposta pedagógica com atividades selecionadas que estimulem ou proporcionem a mudança de nível de conhecimento.

O Modelo de Van Hiele apresenta cinco fases sequenciais para o desenvolvimento da aprendizagem. De acordo com Crowley (1994 apud GEHRKE, 2017) são elas:

**Fase 1:** interrogação/informação: professor e estudantes conversam e desenvolvem atividades sobre o objeto de estudo. É uma fase preparatória em que o professor apresenta materiais e informações sobre o conteúdo que será desenvolvido, dando oportunidade para o estudante demonstrar seu conhecimento prévio e adquirir conhecimentos básicos.

**Fase 2:** orientação dirigida: nessa fase, os estudantes têm a oportunidade de explorar os materiais trazidos pelo professor. É importante que as tarefas sejam cuidadosamente elaboradas a fim de preparar os estudantes para novos conceitos que irão surgir, favorecendo a mudança de nível.

- Fase 3:** explicação: nessa fase, o professor estimula os estudantes a expressarem suas descobertas por meio do diálogo. Busca orientá-los quanto ao uso de uma linguagem precisa e adequada, o que favorece uma boa comunicação entre o grupo e demonstra a assimilação dos novos conceitos adquiridos na fase anterior.
- Fase 4:** orientação livre: nessa fase, propõem-se aos estudantes tarefas mais complexas, o que permite que todos os conceitos trabalhados até o momento sejam colocados em prática. O professor sugere determinadas tarefas e o estudante com sua experiência busca suas próprias estratégias para resolvê-las.
- Fase 5:** integração: na fase final, os estudantes reveem e organizam o que aprenderam até o momento, com a finalidade de formar uma visão mais geral sobre o conceito desenvolvido. “No final da quinta fase, os estudantes alcançaram um novo nível de pensamento. O novo domínio de raciocínio substitui o antigo, e os estudantes estão prontos para repetir as fases de aprendizado no nível seguinte” (GEHRKE, 2017, p. 22-23).

Pode-se perceber que as fases são muito importantes para que essa teoria possa ser desenvolvida com sucesso. Cabe ao professor o desenvolvimento ordenado, com atividades contextualizadas e bem formuladas, para dar condições ao aluno avançar de nível. O professor, ainda, deve respeitar o nível de pensamento geométrico em que o aluno se encontra, pois se o conteúdo for realizado acima do nível de compreensão do aluno, acarretará no não aprendizado dos conceitos estudados.