VIII Jornada Nacional de EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
XXI Jornada Regional de EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Educação Matemática: identidade em tempos de mudança
06 a 08 de maio de 2020
UPF

ESBOÇANDO CURVAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS A PARTIR DA NOÇÃO DE INFINITÉSIMO

Bárbara Cristina Pasa
Universidade Federal da Fronteira Sul
bapasa1@hotmail.com

Danieli Binotto
Universidade Federal da Fronteira Sul
danieli.binotto@outlook.com

Méricles Thadeu Moretti
Universidade Federal de Santa Catarina
mthmoretti@gmail.com

Eixo Temático: E4 – Práticas e Intervenções na Educação Básica e Superior

Modalidade: Comunicação Científica

Resumo

As abordagens utilizadas no ensino de funções trigonométricas, seja no âmbito universitário ou escolar, têm sido estudadas quanto às possibilidades de aprendizagem e compreensão por parte dos alunos. Uma vez que, apesar de saberem como expressar as funções, seja com uma representação algébrica ou gráfica, muitas vezes, senão na maioria delas, os alunos não compreendem como as variáveis simbólicas das duas representações estão relacionadas entre si ou como a função se comporta no restante de seu domínio. A abordagem de esboço de curvas a partir da noção de infinitésimo é baseada na abordagem de interpretação global de propriedades figurais, preconizada por Raymond Duval, cuja premissa é trabalhar as funções e o esboço de curvas a partir da identificação e coordenação de unidades básicas das representações. Nesta perspectiva, a noção de infinitésimo funciona como recurso de interpretação global ao possibilitar encontrar a taxa de variação da função cuja compreensão e estudo fornecem dados acerca do crescimento e decrescimento, permitindo inferir sobre o comportamento da curva em cada ponto de seu domínio. Este artigo visa apresentar a abordagem de ensino para as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente a partir da noção de infinitésimo como mais uma possibilidade de trabalho em sala de aula do ensino médio que possibilita o reconhecimento de características essências das funções relacionadas à variabilidade.

Palavras-chave: Funções. Esboço de curvas. Infinitésimo. Aprendizagem.

1 Introdução

Questões relacionadas à aprendizagem matemática vêm sendo bastante estudadas considerando as demandas atuais por conhecimentos da área, as dificuldades apresentadas por estudantes de todos os níveis de ensino na compreensão de objetos matemáticos e a peculiaridade de acesso ao objeto matemático. A sociedade exige cada vez mais do cidadão capacidades como interpretação de dados e situações, argumentação, reflexão, resolução de problemas da realidade, utilização de modelos matemáticos em situações diversas, e conhecimentos sobre diferentes tecnologias. Por outro lado, embora essa consciência da necessidade, estudos demonstram as dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem na área e pesquisas buscam por estratégias, metodologias, experiências e dinâmicas eficazes que deem conta dessas dificuldades e possibilitem a aprendizagem da matemática.

Raymond Duval (2003), psicólogo francês, interessado nas questões que envolvem a aprendizagem matemática discorre sobre as dificuldades dos alunos nesta área e a origem desta incompreensão propondo uma abordagem cognitiva que possibilite ao aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos, destacando a importância das representações semióticas. Sob o ponto de vista cognitivo, segundo este autor (2003, p.14), a matemática se caracteriza pela grande diversidade de representações semióticas como língua natural, figuras geométricas, sistemas de numeração, sistemas de escritas algébricas e formais e as representações gráficas. A importância dessas representações está em proporcionar o acesso aos objetos matemáticos, que diferente dos objetos das demais ciências, são abstratos. Assim, de acordo com Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2004), a principal forma de saber se um aluno possui conhecimento e domínio sobre um objeto matemático, segundo Duval (2003), é observar a capacidade de reconhecer o objeto a partir de, no mínimo, duas representações semióticas distintas e, mais do que isso, a habilidade de transitar entre essas representações. No caso do estudo de funções, as representações mais utilizadas são a gráfica e a escrita algébrica.

Neste cenário de demandas, dificuldades e peculiaridades, o estudo de funções, especificamente, há muito tem sido discutido e problematizado em todos os níveis de ensino devido, entre outras coisas, a sua importância na compreensão e interpretação de fenômenos nas diversas áreas da vida humana. Especificamente em relação ao ensino e à aprendizagem de gráficos de funções, Duval (2011) afirma que somente uma *abordagem de interpretação global de propriedades figurais* possibilita a compreensão integral da curva e do que ela representa (DUVAL, 2011). Nesta perspectiva, a compreensão de um gráfico não se limita no fazer um desenho ou imagem geométrica de uma sentença algébrica que representa uma função, mais do que isso, a abordagem baseada na interpretação global das propriedades figurais, "possibilitará reconhecer quais modificações na expressão algébrica refletem em modificações na expressão gráfica da curva e vice-versa, o que contribuirá para uma melhor aprendizagem" (CORRÊA;

MORETTI, 2014, p.44). Desta forma, faz-se necessário identificar, em uma função, variáveis visuais, pertinentes ao registro de representação gráfico e unidades simbólicas significativas, pertinentes ao registro de representação algébrico (simbólico), e coordená-las.

Para que o estudo sobre o traçado de curvas promova ou se aproxime da interpretação global de propriedades figurais é necessário realizar uma análise das propriedades peculiares de partes constituintes da curva (MORETTI, FERRAZ, FERREIRA, 2008). Duval (2011) realiza este tipo de análise para o caso específico da função polinomial do primeiro grau ($\mathrm{y} = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$) ressaltando a importância da análise qualitativa no sentido de perceber no coeficiente angular a, o sentido da inclinação da reta, por exemplo. Isto significa que, para que haja uma compreensão integral do esboço de uma curva segundo este autor, é necessário conhecer regras de correspondência semiótica entre o registro da representação gráfica e o registro de representação algébrica, e que a falta deste conhecimento é que pode gerar as dificuldades de aprendizagem (DUVAL, 2011).

A partir deste estudo de Duval (2011), a abordagem de interpretação global de propriedades figurais vem inspirando pesquisadores (Moretti (2003), Silva (2008), Luiz (2010); Moretti, Ferraz e Ferreira (2008); Menoncini e Moretti (2017); Martins (2017); Pasa (2017)) na busca por recursos e/ou elementos que permitam uma associação entre variáveis visuais e unidades significativas algébricas. As funções trigonométricas são estudadas por Silva (2008), utilizando como recursos para a interpretação global a *translação* e a *simetria em paralelo* com as unidades significantes da expressão algébrica. Embora esse estudo permita as conversões entre representações algébrica e gráfica necessárias para a interpretação global, características das funções relativas à variabilidade não são evidenciadas pelos recursos utilizados neste estudo.

Neste sentido, este artigo visa apresentar uma possibilidade de trabalho com as funções trigonométricas $y = sen\,x$, $y = cos\,x$ e $y = tg\,x$, no âmbito do ensino médio, ancorada na abordagem de interpretação global de propriedades figurais, refletindo a transição entre as representações algébrica e gráfica a partir da compreensão da taxa de variação dessas funções. Este trabalho percorre o *caminho alternativo* para esboçar curvas, proposto por Pasa (2017) que perpassa a análise infinitesimal para compreensão da taxa de variação da função.

2 Taxas de variação da função enquanto recurso para a interpretação global

As *taxas de variação* de uma função são eficientes como recurso mediador da análise de interpretação global uma vez que são elementos que carregam informações valiosas para o esboço e a compreensão da curva de uma função. Além disso, a compreensão do conceito de taxa de variação, bem como dos objetos matemáticos envolvidos nele e a sua relação com os objetos do universo material, perpassam o entendimento de diversos fenômenos físicos, químicos, biológicos, econômicos, matemáticos, etc., permitindo estudar, explicar e predizer o comportamento destes fenômenos, obtendo conclusões acerca destes. Ademais, a compreensão de taxas de variação possibilita, de acordo com Pasa (2017), dar significado ao estudo das funções no ensino médio, o que é reconhecido pelos documentos balizadores da educação básica de Matemática como, por exemplo, os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2008).

Todavia, as taxas de variação de funções e sua relação com a compreensão e o esboço de curvas, são somente trabalhadas de forma mais aprofundada no ensino superior, especificamente nos cursos de cálculo diferencial e integral e com tamanho rigor e formalização inapropriados para o ensino médio. Por isso, a fim de proporcionar a interpretação global a partir de unidades visuais significativas e possibilitar ao estudante deste nível de ensino a compreensão de variabilidade necessária não só para esboço de curvas, mas para a compreensão de fenômenos e análises de situações, Pasa (2017) utiliza o potencial didático da *noção de infinitésimos* no cálculo das taxas de variação, não no sentido de seu rigor e formalização, mas no de possibilitar o entendimento de variação, fundamental no esboço de curvas e sem recorrer à formalização das noções de limite e derivada.

Admitindo que as inconsistências matemáticas relacionadas à noção de infinitésimos foram superadas e que a abordagem via limites, única utilizada no ensino atual para cálculo de taxas de variação, ocasiona dificuldades de aprendizagem de acordo com os autores Rezende (1994), Baruffi (1999), Cabral e Baldino (2006) e Carvalho e D’Ottaviano (2006), corroboramos com Pasa (2017) ao defender que o potencial didático dos infinitésimos está na possibilidade de entendimento da variação de uma função, característica fundamental para o esboço de curvas e compreensão da conversão entre registros de representação.

De acordo com Carvalho e D’Ottaviano (2006), o uso dos infinitésimos no ensino de Cálculo, “em diversos aspectos, é bem mais natural e instigante” (p. 34). Dentre as vantagens para o estudante de trabalhar com infinitésimos neste nível de ensino, Keisler (1986 apud CARVALHO; D’OTTAVIANO, 2006, p. 34), afirma que uma delas é sua maior afinidade com aspectos intuitivos que conduziram à criação do Cálculo Diferencial e Integral e também a possibilidade de tornar mais fácil a compreensão dos conceitos de derivada e integral.

A escolha pela noção de infinitésimo se aproxima da ideia de Cabral e Baldino (2006), quando defendem o uso de infinitésimos para a construção das noções iniciais de cálculo para não matemáticos profissionais. Os autores afirmam que os infinitésimos fazem parte das concepções espontâneas dos estudantes e referem-se às concepções provisórias ou temporárias construídas sobre a ideia de infinitésimo como, "mesmo que matematicamente instáveis, são necessárias para o aluno passar das concepções espontâneas para as definições matemáticas" (CABRAL, BALDINO, 2006, p. 13). O uso de infinitésimos tornou-se, nesta perspectiva, um recurso interessante de ensino na compreensão de taxas de variação de funções no ensino médio.

A partir dessas compreensões, o esboço de curvas das funções trigonométricas $y = sen\,x$, $y = \ cos\,x$ e $y = tg\,x$ no ensino médio pode ocorrer por meio do caminho alternativo (PASA, 2017) na perspectiva de interpretação global a partir das taxas de variação da função sem recorrer à formalização das noções de limite e derivada. Assim, para encontrar a taxa de variação instantânea de primeira ordem[1] - $TVI_1(x)$ de uma função, encontra-se primeiramente a taxa média de variação (TMV) da função em um intervalo genérico Δx: $TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ e considera-se Δx um infinitésimo, ou seja, um número muito próximo de zero (infinitamente próximo de zero), de forma que às vezes pode ser desprezado, mas, ao mesmo tempo, diferente de zero, de forma que podemos dividir por ele mesmo quando isso for conveniente. Desta forma, a noção de infinitésimo é utilizada intuitivamente e se mostra um recurso interessante e frutífero neste contexto devido ao fato de ela proporcionar uma compreensão intuitiva sobre a variabilidade de funções, favorável ao entendimento de fenômenos no ensino médio.

3 Esboço de curvas de funções trigonométricas

O esboço de curvas de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas é estudado profundamente na dissertação de mestrado de Silva (2008) e alguns resultados são publicados em Corrêa e Moretti (2014). Nestes estudos, é discutida a proposta de esboçar curvas destas funções, utilizando variáveis visuais como a *amplitude e o período*, e recursos como a *translação e a simetria* em paralelo com as unidades significantes da expressão algébrica (CORRÊA; MORETTI, 2014).

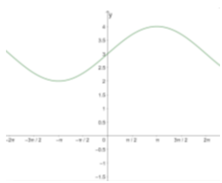
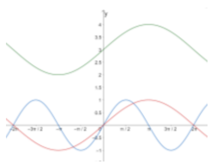
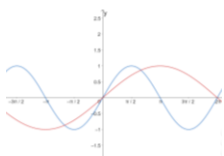
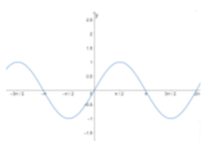
A proposta de Corrêa e Moretti (2014) se baseia na aplicação da operação cognitiva de tratamento nos registros algébrico e figural de maneira separada e paralela de uma curva base,

1 $TVI(x)$ ou $TVI_1(x)$ é a taxa de variação instantânea de primeira ordem de uma função, enquanto que a ideia de *variação da taxa de variação instantânea*, ou taxa de variação instantânea de segunda ordem da função é representada por $TVI_2(x)$.

por exemplo, no caso das senoides, $y = sen\ x$, com o objetivo de chegar aos coeficientes das expressões algébricas, evidenciando as alterações na curva provocadas por variações nos coeficientes de suas expressões. Após uma série de tratamentos, chega-se à expressão $y - \pm a = b.sen(kx - \pm c)$.

Para a curva base das senoides, $y = sen\ x$, a análise é feita para $f: [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ e o esboço é feito por uma tabela de pontos para o intervalo $[0, 2\pi]$, obtendo através da simetria o intervalo de interesse $[-2\pi, 2\pi]$. Como esta não é a abordagem foco de estudo deste artigo, uma explicação mais detalhada pode ser encontrada em Silva (2008, p. 109) ou Corrêa e Moretti (2014, p.40). Abaixo segue exemplo de esboço feito através do método brevemente explanado acima.

Tabela 1: Esboço de curva representativa da função seno com variações.

Equação da curva em estudo	**Esboço da curva em estudo**
$f3 : y = 3 + sen\ \frac{x}{2}$ ↑	
$f3 : y - (+3) = sen\ \frac{1}{2}x$ ↑	
$f2 : y = sen\ \frac{1}{2}x$ ↑	
$f1 : y = sen\ x$ ↑	
Tratamento algébrico na equação da curva base, acrescentando um a um até obter a equação dada.	Tratamento no esboço da curva base, aplicando as modificações figurais a partir dos coeficientes (amplitude, translação).

Fonte: Corrêa e Moretti (2014, p. 47).

Os autores Corrêa e Moretti (2014) descrevem em sua obra a mesma analogia feita para as funções cosseno, logarítmicas e exponenciais, levando em conta os parâmetros das funções.

4 Possibilidades para o esboço da curva das funções seno, cosseno e tangente através da abordagem infinitesimal

O acréscimo de uma quantidade infinitesimal, definida na pesquisa de Pasa (2017), como Δx, é feita ao valor de x para o cálculo da taxa de variação da função. Como a quantidade acrescida ao valor de x (Δx) é infinitesimal, o valor da taxa média de variação (TMV) pode ser considerada como a taxa de variação instantânea em x ($TVI(x)$). Uma análise dos sinais desta taxa para os valores do domínio fornece informações sobre a reta tangente à curva naquele ponto, seu crescimento ou decrescimento e consequentemente sobre o comportamento da mesma em seu domínio.

Seguem abaixo o cálculo da taxa média de variação (TMV) de uma função seno, definida como $y = sen\ x$ para o intervalo $[x, x + \Delta x]$.

$$TMV = \frac{sen\ (x + \ \Delta x) - sen\ x}{\Delta x}$$

Utilizando o seno da adição de dois arcos:

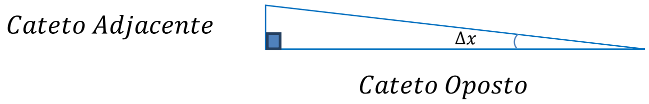
$$sen\ (x + \Delta x) = sen\ x. \cos \Delta x + sen\ \Delta x. \cos x$$

Obtém-se:

$$TMV = \frac{sen\ x. \cos \Delta x + sen\ \Delta x. \cos x - sen\ x}{\Delta x}$$

Utilizando o triângulo retângulo da figura 1, Pasa (2017) faz uma análise para definição dos valores de $sen\ \Delta x$ e $\cos \Delta x$.

Figura 1 – Triângulo retângulo com arco Δx infinitesimal.

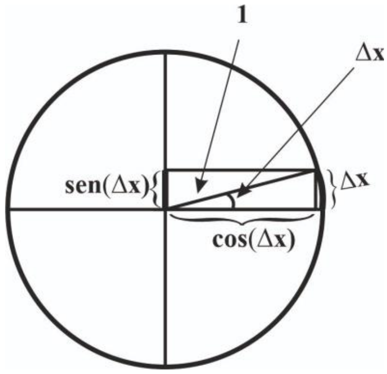


Fonte: Pasa (2017, p. 151)

A partir da figura 1 pode-se concluir que $cos\ \Delta x = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} = 1$, pois ambos os valores do cateto adjacente e da hipotenusa possuem tamanhos infinitamente próximos.

Utilizando uma análise análoga, chega-se a $sen\,\Delta x = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \Delta x$. A fim de clarificar os valores de $sen\,\Delta x$ e de $cos\,\Delta x$, apresentamos na figura 2 o ciclo trigonométrico indicando o arco Δx e os segmentos que simbolizam o $sen\,\Delta x$ e o $cos\,\Delta x$.

Figura 2 – Valores de $sen\,\Delta x$ e de $cos\,\Delta x$ a partir do ciclo trigonométrico sendo Δx infinitesimal.



Fonte: Autores, 2020.

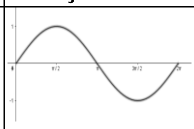
A partir da taxa média de variação para um intervalo $[x, x + \Delta x]$ encontra-se a taxa de variação instantânea $TVI_1(x)$ da função $y = sen\,x$.

$$TVI_1(x) = \frac{sen\,x.1 + \Delta x.\cos x - sen\,x}{\Delta x}$$

$$TVI_1(x) = \frac{\Delta x.\cos x}{\Delta x} \rightarrow TVI_1(x) = \cos x$$

Após o estudo do sinal da taxa de variação instantânea de primeira ordem, é possível apresentar uma tabela que ilustra o comportamento (crescimento e decrescimento) da curva da função $y = sen\,x$ ao longo de seu domínio, e assim, concluir sobre sua representação gráfica.

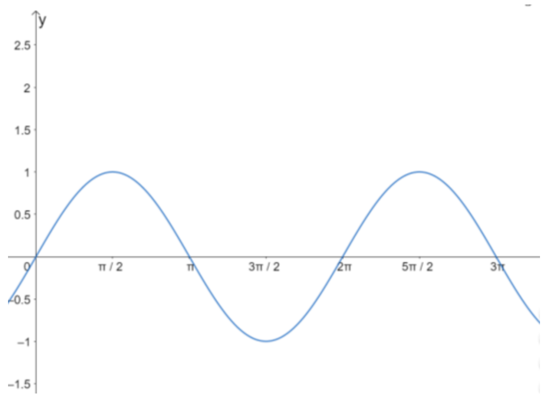
Tabela 2: Esboço das propriedades da função $y = sen\,x$ no domínio de $[0, 2\pi]$.

Unidades básicas simbólicas		**Unidades básicas gráficas**		
$\boldsymbol{TVI_1(x)}$	**Valor de x**	**Reta tangente**	**Ponto crítico**	**Esboço da curva**
> 0	$0 < x < \pi/2$ $3\pi/2 < x < 2\pi$	Crescente	Mínimo absoluto em $(3\pi/2, -1)$ Máximo absoluto em $(\pi/2, 1)$	
$= 0$	$x = \pi/2\ e$ $x = 3\pi/2$	Constante		
< 0	$\pi/2 < x < 3\pi/2$	Decrescente		

Fonte: Pasa (2017. p. 152).

Para o domínio $\mathbb{R}$, representação gráfica para a função $y = sen\,x$ é apresentada na figura 3.

Figura 3 - Representação gráfica da função $y = sen\,x$ para domínio $\mathbb{R}$.



Fonte: Autores, 2020.

Para o caso da função cosseno ($y = \cos x$), o cálculo é análogo ao da função $y = sen\ x$. Encontra-se TMV para um intervalo $[x,\ x + \Delta x]$,

$$TMV = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

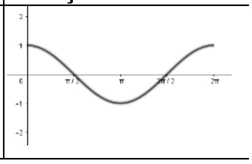
Aplicando o cosseno da soma de dois arcos e tomando Δx como um infinitésimo, tem-se:

$$TVI_1(x) = \frac{\cos x . \cos \Delta x - sen\ x . sen\ \Delta x - \cos x}{\Delta x}$$

$$TVI_1(x) = -sen\ x$$

Após análise de sinal da taxa de variação instantânea, a coordenação entre registro algébrico da taxa de variação e gráfico da função, tem-se a tabela 3.

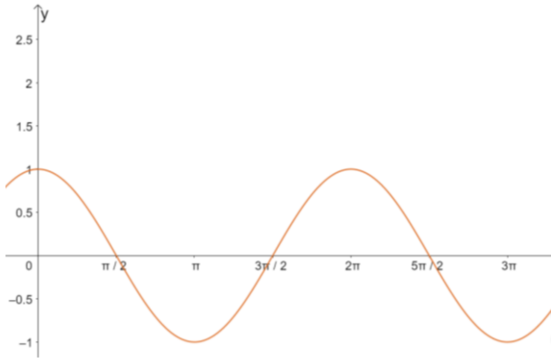
Tabela 3: Esboço das propriedades da função $y = cos\ x$ no domínio de $[0, 2\pi]$.

Unidades básicas simbólicas		**Unidades básicas gráficas**		
$\boldsymbol{TVI_1(x)}$	**Valor de $\boldsymbol{x}$**	**Reta tangente**	**Ponto crítico**	**Esboço da curva**
> 0	$\pi < x < 2\pi$	Crescente	Mínimo absoluto em $(\pi, -1)$ Máximo absoluto em $(0,1)$ e $(2\pi, 1)$	
$= 0$	$x = 0\ e\ x = \pi$	Constante		
< 0	$0 < x < \pi$	Decrescente		

Fonte: Pasa (2017, p. 152).

Para o domínio $\mathbb{R}$, representação gráfica para a função $y = cos\ x$ é apresentada na figura a seguir.

Figura 4: Representação gráfica da função $y = cos\ x$ para domínio $\mathbb{R}$.



Fonte: Autores, 2020.

Por fim, a análise para a função tangente ($y = tg\ x$),

$$TMV = \frac{tg\ (x + \ \Delta x) - tg\ x}{\Delta x}$$

Sendo $tg\ x = \frac{sen\ x}{\cos x}$ obtém-se:

$$TMV = \frac{\frac{sen\ (x + \ \Delta x)}{\cos(x + \ \Delta x)} - \frac{sen\ x}{\cos x}}{\Delta x}$$

$$TMV = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{sen\ (x + \ \Delta x)}{\cos(x + \ \Delta x)} - \frac{sen\ x}{\cos x}\right)$$

$$TMV = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{sen\ x. \cos\ \Delta x + sen\ \ \Delta x. \cos x}{\cos x. \cos\ \Delta x - sen\ x. sen\ \ \Delta x} - \frac{sen\ x}{\cos x}\right)$$

Utilizando novamente a ideia do triângulo retângulo explanada na figura 1, onde $sen\ \Delta x = \ \Delta x$ e $\cos\ \Delta x = 1$, aplicando mínimo múltiplo comum e fazendo ajustes e substituições possíveis, obtém-se:

$$TMV = \frac{1}{cos^2 x + \ \Delta x\ sen\ x. \cos x}$$

Como Δx é uma quantidade infinitesimal,

$$TVI_1(x) = \frac{1}{cos^2\ x} = sec^2 x$$

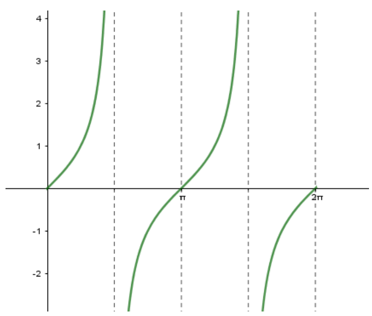
Como a função $TVI_1(x) = \frac{1}{cos^2\ x} = sec^2 x$ nunca será zero, para $x \epsilon [0,2\pi]$, o domínio da taxa de variação instantânea será todos os reais exceto $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$. Assim, o esboço da curva será ascendente e não terá pontos máximos ou mínimos. Uma visão mais detalhada do esboço da curva pode ser obtida a partir da $TVI_2(x)$, a qual nos informa a respeito da concavidade.

$$TMV_{da\ TVI_1} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{cos^2(x + \Delta x)} - \frac{1}{cos^2 x}\right)$$

Utilizando substituições, mínimo múltiplo comum, simplificações e considerando Δx um infinitésimo, obtém-se a taxa de variação instantânea de segunda ordem,

$$TMV_2(x) = \frac{2\ sen\ x}{cos^3 x}$$

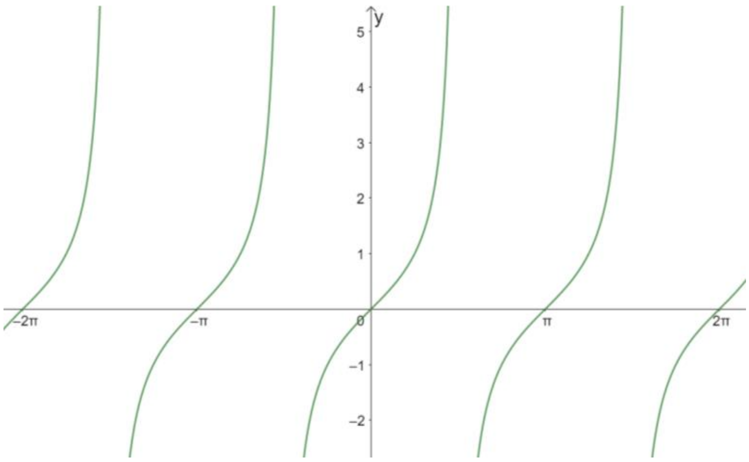
Tabela 4 – Esboço das propriedades da função $y = tg\ x$ no domínio de $[0, 2\pi]$

Unidades básicas simbólicas			Unidade básica gráfica	
$\boldsymbol{TVI_1(x)}$	$\boldsymbol{TVI_2(x)}$	**Valor de x**	**Concavidade**	**Esboço do gráfico**
> 0	> 0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	Positiva – para cima	
	$= 0$	$= 0$	Mudança de concavidade – ponto de inflexão	
	< 0	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	Negativa – para baixo	

Fonte: Autores, 2020.

A tabela 4 apresenta o esboço da curva da função tangente com base na articulação entre unidades básicas simbólicas das taxas $TVI_1(x)$ e $TVI_2(x)$. Portanto, a representação gráfica para a função $y = cos\ x$ é apresentada na figura 5 a seguir.

Figura 5 - Representação gráfica da função $y = tg\ x$ para domínio $\mathbb{R}$.



Fonte: Autores, 2020.

A análise do sinal das taxas de variação de funções permite que propriedades importantes das curvas fiquem explícitas e sejam compreendidas, como os pontos críticos, as raízes e os pontos máximos e mínimos, sejam eles absolutos ou relativos, o que torna esta abordagem necessária em sala de aula do ensino médio. Uma abordagem nesta perspectiva possibilita um entendimento sobre as funções condizente com seu real significado.

5 Considerações Finais

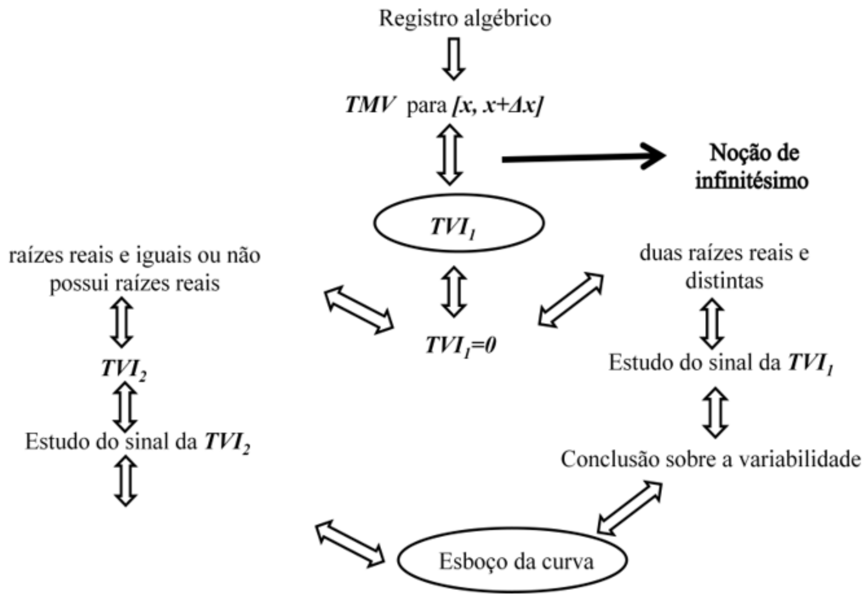
A impossibilidade de acesso perceptível e instrumental a um objeto matemático e sua apreensão por meio exclusivo de suas diversas representações tornam o ensino e a aprendizagem matemáticos peculiares e distintos de outras áreas da ciência. Diante das dificuldades que os estudantes apresentam na interpretação e no esboço de curvas, especialmente tratando-se de funções trigonométricas, e tendo como escopo a compreensão a partir da interpretação global das propriedades figurais, a abordagem proposta para o esboço de curvas trigonométricas utiliza a *noção de infinitésimos* no cálculo das taxas de variação, possibilitando ao estudante a compreensão de variabilidade necessária não só para esboço de curvas, mas para a compreensão de fenômenos e análises de situações diversas, algo que atualmente é exigido em diversas áreas do conhecimento e também em tarefas cotidianas.

Especificamente para o esboço de curvas, pesquisas enfatizam que as dificuldades de aprendizagem se originam de um enfoque dado no ensino, à construção de gráficos a partir da abordagem “ponto a ponto”, a qual não permite a compreensão da operação cognitiva de conversão entre representações semióticas da função, característica esta fundamental para a aprendizagem de acordo com a teoria de Raymond Duval. A abordagem ponto a ponto permite que o aluno vislumbre o comportamento de curvas somente nos valores de domínio escolhidos para a substituição na expressão algébrica e posterior obtenção de coordenadas, enquanto a abordagem aqui exposta possibilita um esboço para o domínio $\mathbb{R}$.

A noção do infinitésimo é abordada com o intuito de esboçar a curva e de melhorar a compreensão dos estudantes no que tange à variabilidade da função. O caminho alternativo apresentado, baseado na proposta de Pasa (2017) possibilita a coordenação de unidades básicas simbólicas e gráficas, viabilizada pelas taxas de variação instantâneas da função.

A utilização da taxa de variação para esboçar curvas na perspectiva da interpretação global, descrita por Pasa (2017) para funções polinomiais, é resumida no esquema da figura 6.

Figura 6: Esquema do caminho alternativo para esboço de curvas de funções polinomiais do segundo grau.



Fonte: Pasa (2017, p. 286).

Este esquema, que também perpassa o esboço de curvas de funções trigonométricas, resume o caminho alternativo na perspectiva deste trabalho. É importante enfatizar as possíveis dificuldades no cálculo das taxas de variação das funções trigonométricas, sobretudo quando são necessários o conhecimento do círculo trigonométrico, das substituições trigonométricas e do seno, cosseno e tangente da soma de dois arcos e que podem exigir um alto custo cognitivo do estudante. Contudo, ainda assim, em conseguindo superar as dificuldades relacionadas a essas questões, o caminho proposto é condizente com os objetivos do estudo de funções no âmbito do ensino médio, bem como com o que é necessário para que ocorra a aprendizagem, de acordo com a teoria de aprendizagem de Raymond Duval, evidenciando características fundamentais das funções como a transformação e o dinamismo e variação.

6 Referências

BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral*. 1999. 195 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

CABRAL, T.C. B; BALDINO, R. R. Cálculo infinitesimal para um curso de engenharia. *Revista de Ensino e Engenharia*, v. 25, n. 1, p. 3-16, 2006.

CARVALHO, T. F. de; O'TTAVIANO, I. M. L. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente**.** *Educação Matemática Pesquisa*, v. 293 8, n. 1, pp. 13-43, São Paulo, 2006.

CORREA, Madeline Odete Silva. MORETTI, Méricles Thadeu. Esboçando Curvas de Funções a Partir de Suas Propriedades Figurais: uma Análise sob a Perspectiva dos Registros de Representação Semiótica. In. BRANDT, Célia Finck . MORETTI, Méricles Thadeu (ORG). *Contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática*. Ijuí : Ed. Unijuí, 2014, p. 390-65.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática*: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

___________. *Semiosis y pensamento humano*: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali: Universidade del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía, 2004.

___________. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. Méricles Thadeu Moretti. *Revemat*, eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 91-112, 2011a.

___________. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011b.

LUIZ, L. S. *Esboço de curvas no ensino superior:* uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias. 2010. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação Cientifica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

MARTINS, M.H.S. *A interpretação global de propriedades figurais no esboço de curvas dadas por equações paramétricas.* (220f.). Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – PPGECT, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

MENONCINI, L., MORETTI, M.T. A interpretação global figural como recurso para o esboço de curvas de funções modulares lineares. *Educação Matemática em Revista* – RS, Ano 18, 1 (18), v.1, pp. 126-134, 2017.

MORETTI, M. T.; FERRAZ, G. A.; FERREIRA, V. G. G. Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. *Quadrante* – Revista de Investigação em Educação Matemática, v. XVII, n. 2, 2008.

MORETTI, M. T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, S. D. A. (Org). *Aprendizagem matemática:* registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Tradução: Magda Melo. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2008.

PASA, B. C. *A Noção do Infinitésimo no Esboço de Curvas no Ensino Médio:* Por uma Abordagem de Interpretação Global de Propriedades Figurais. 2017. 311 f. Tese (Doutorado em Educação Cientifica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

REZENDE, W. M. *Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite*. Dissertação de mestrado. Rio de Janeiro: IEM – USU, 1994.

SILVA, M. O. *Esboço de curvas:* análise sob uma perspectiva dos registros de representação semiótica. 2008. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Cientifica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.