



VIII Jornada Nacional de  
**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**  
XXI Jornada Regional de  
**EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**Educação Matemática: identidade  
em tempos de mudança**  
06 a 08 de maio de 2020



## **ANÁLISE DE ABORDAGENS INVESTIGATIVAS COM O SOFTWARE GEOGEBRA PARA O CONCEITO DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO**

*Tailon Thiele*  
*Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - URI*  
*Membro Aspirante da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM/RS*  
*thiele.tailon@gmail.com*

*Eliane Miotto Kamphorst*  
*Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - URI*  
*miottokamphorst@gmail.com*

*Priscila da Costa*  
*Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões - URI*  
*prisciladacosta71@gmail.com*

*Carmo Henrique Kamphorst*  
*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha - IFFar*  
*carmohenriquek@gmail.com*

**Eixo Temático:** Práticas e Intervenções na Educação Básica e Superior

**Modalidade:** Comunicação Científica

### **Resumo**

Este trabalho tem como objetivo realizar uma análise sobre algumas abordagens metodológicas em trabalhos da área da educação matemática que utilizam o software GeoGebra para o ensino do conceito de limite de uma função. Para isso, inicialmente é feita uma pesquisa bibliográfica em que são apontadas algumas considerações acerca da investigação matemática e o uso de tecnologias digitais na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, com foco no GeoGebra. Na sequência, são apresentadas e discutidas propostas de ensino que envolvem o limite de uma função com o GeoGebra, com base nos diferentes significados inerentes a este conceito. Os resultados mostram que os significados mais ocorrentes nas abordagens pedagógicas analisadas são o significado gráfico e o geométrico. Em relação ao GeoGebra, verifica-se que ainda pode ser mais bem aproveitado no âmbito do conceito em estudo, uma vez que é possível explorar seus recursos de maneira mais investigativa e que contemple mais significados.

**Palavras-chave:** Investigação Matemática. Tecnologias Digitais. Propostas Didáticas. Cálculo Diferencial e Integral.

### **1 Introdução**

A problemática abordada neste trabalho se refere às dificuldades enfrentadas por estudantes do ensino superior na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. As práticas pedagógicas de docentes desta unidade curricular vêm sendo discutidas por diversos autores (VIEIRA; RIOS, 2019; WISLAND, FREITAS; ISHIDA, 2014; PAGANI; ALLEVATO,

2014; GARZELLA, 2013; RESENDE, 2003; BARUFI, 1999), os quais apontam para altos índices de reprovação e evasão, decorrentes de abordagens pouco inovadoras. Neste contexto, é importante que sejam discutidas alternativas que buscam intervir e amenizar os problemas de aprendizagem.

Uma alternativa encontrada por pesquisadores da área da educação matemática se concentra em propor abordagens para conceitos específicos da disciplina. De modo geral, é perceptível que estas metodologias de ensino utilizam tecnologias digitais, tendo em vista o valor pedagógico oferecido por essas ferramentas. O uso de softwares educativos tem recebido destaque, pois permitem o estudo investigativo da matemática, além de muitos estarem disponíveis gratuitamente. Dentre as opções, destaca-se o software GeoGebra pela sua interface que conecta representações algébricas e geométricas do mesmo objeto matemático.

Existem diversas propostas de ensino para conceitos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral disponíveis na literatura, dentre as quais algumas utilizam o software GeoGebra. Daí torna-se importante discutir estas propostas a fim de analisar como tem sido pensado o trabalho pedagógico tomando como base as tendências em educação matemática. A partir disso, é possível apontar contribuições no sentido de aperfeiçoar cada vez mais estas propostas, ao mesmo passo que se podem identificar possibilidades para novas abordagens.

Nesse âmbito, o presente trabalho tem como objetivo discutir algumas propostas metodológicas disponíveis na literatura que abordam o conceito de limite de uma função. Este é um dos principais conceitos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e, geralmente o primeiro a ser estudado nesta unidade curricular. Parte-se de algumas considerações teóricas acerca das tecnologias digitais e suas potencialidades para o desenvolvimento de atividades investigativas em matemática. Na sequência, são apresentadas algumas abordagens e analisadas do ponto de vista pedagógico, segundo as diferentes significações inerentes ao conceito de limite. Por fim, pretende-se pensar a utilização do GeoGebra de acordo com suas potencialidades.

## **2 Metodologia**

Neste trabalho é feita uma análise de trabalhos disponíveis na literatura, configurando-se como uma pesquisa bibliográfica.

### 3 Referencial teórico

#### 3.1 Investigação matemática e tecnologias digitais

A pesquisa em educação matemática tem indicado novos caminhos para as práticas pedagógicas, visando um ensino que possibilite o desenvolvimento de competências e habilidades consonantes com as demandas da atual sociedade. Torna-se cada vez mais importante o domínio e a capacidade de argumentação, o raciocínio lógico e a criatividade para a tomada de decisões de modo racional. Dentre as perspectivas que ganham destaque, as metodologias ativas buscam justamente propor maior autonomia aos estudantes no processo de construção de conhecimento. Nesse contexto, a investigação matemática pode se tornar um elemento importante no trabalho pedagógico e, conseqüentemente, na aprendizagem.

O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

Nesta perspectiva, nota-se uma reconfiguração dos objetivos referentes à formação dos estudantes. O ensino deixa de estar vinculado à ideia de repassar conteúdo estático, e passa a fornecer meios que permitam ao aluno construir concepções próprias. No entanto, esse processo requer ferramentas que possibilitem uma interação entre aluno e conhecimento. Daí, as tecnologias digitais surgem como importantes aliadas ao trabalho pedagógico, principalmente como um complemento para a análise de diferentes linguagens e representações matemáticas (MOTTA et al. 2011). Em relação à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral não é diferente.

As tecnologias propiciam investigações matemáticas, pois, com uma única atividade podem emergir outras perguntas, problemas, observação de regularidades, investigações e outros conceitos podem ser retomados ou abordados. Além disso, o professor de Cálculo tem aí uma possibilidade de tornar a abordagem de certos conceitos significativa para os estudantes, gerando novas compreensões em função da ampliação das formas de interação aluno-conteúdo, comparando-se com estratégias metodológicas clássicas, que priorizam a abordagem estática do conteúdo (RICHIT; FARIAS, 2013, p. 5).

A produção de conhecimento, no entanto, é construída de forma coletiva e complementar entre estudantes, professores e tecnologias e, neste contexto, o papel docente toma uma nova dimensão. Os professores precisam estar atentos ao comportamento dos

conceitos matemáticos e como eles se constituem neste espaço de investigação, avaliando constantemente os efeitos das atividades. Da mesma forma, devem estar preparados para um ambiente desafiador e imprevisível (BORBA; PENTEADO, 2012).

### 3.2 O Software GeoGebra

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica que apresenta uma interface que faz uma conexão entre álgebra e geometria. De acordo com Borba, Silva e Gadanidis (2014), esta ferramenta tem um potencial pedagógico de destaque dentre as várias tecnologias digitais disponíveis. No processo de evolução das tecnologias digitais em educação matemática, são apontadas quatro fases a partir da utilização de computadores e calculadoras simples até instrumentos que permitem estudos dinâmicos e interativos, que é a fase atual. Os autores situam o GeoGebra dentro da fase atual, evidenciando a importância de discutir a sua inserção no ambiente de aprendizagem e aperfeiçoar as formas de utilização. Além disso, está disponível gratuitamente a todos, podendo ser baixado no link <<https://www.GeoGebra.org/download>>.

Ao considerar a utilização do GeoGebra na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, é possibilitado ao estudante manipular os objetos de estudo de forma exploratória, em detrimento a abordagens abstratas. A epistemologia geométrica dos conceitos é imprescindível para que a aprendizagem ocorra satisfatoriamente (RICHT; FARIAS, 2013). Além disso, o estudo do conceito de limite geralmente é o primeiro contato do estudante com a matemática do ensino superior, e abordagens dessa natureza podem contribuir para que os estudantes construam uma visão mais dinâmica do conteúdo (JARDIM *et al*, 2015).

### 3.3 O conceito de limite

O limite de uma função é um dos principais conceitos estudados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Stewart (2012), define o limite de uma função, escrevendo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , onde lê-se

“o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a  $a$ , é igual a  $L$ ”, se pudermos tornar os valores de  $f(x)$  arbitrariamente próximos de  $L$  (tão próximos de  $L$  quanto quisermos), tomando  $x$  suficientemente próximo de  $a$  (por ambos os lados de  $a$ ), mas não igual a  $a$  (STEWART, 2012, p. 78).

No entanto, esta ideia principal é estruturada a partir de diferentes significados, os quais são apresentados por Fuente, Armenteros e Moll (2012). O primeiro significado é o gráfico, em que é feita a relação entre a representação gráfica e o limite da função. O segundo

está ligado à natureza geométrica, e faz referência ao axioma da continuidade de funções. O terceiro significado é o chamado pré-infinitesimal, que requer do aluno o raciocínio do “infinitamente pequeno”, ou seja, tem relação ao limite no infinito. O próximo é o significado infinitesimal, que requer um pensamento abstrato sobre a aproximação dos limites laterais, ou seja, apenas é feita a substituição do valor ao qual a função está tendendo. Por último tem-se o significado numérico do limite, desenvolvido através da construção de tabelas de atribuição de valores à variável independente.

De acordo com os autores, é desejável que os estudantes tenham acesso a todas essas compreensões. A análise que será feita na sequência deste artigo buscará levar em consideração estes significados. No entanto, de antemão, já é esperado que em apenas uma proposta metodológica não se contemplem todas estas significações, tendo em vista a complexidade do processo como um todo, além do fato de que algumas delas não requerem o uso de tecnologias e podem ser feitos de forma paralela de acordo com a organização da aula.

#### **4 Resultados: algumas propostas de ensino para o conceito de limite**

A bibliografia disponível atualmente dispõe de várias propostas de ensino para o conceito de limite com metodologias ativas. Dentre elas, algumas utilizam o GeoGebra como principal ferramenta no estudo deste conceito. No entanto, ainda são poucos os trabalhos que analisam as propostas de modo geral. Este esforço é importante para que se tenha um panorama amplo de como as pesquisas têm abordado o ensino de Cálculo Diferencial e Integral de acordo com as tendências em educação matemática e, a partir disso, identificar possíveis caminhos para a produção de novos materiais com potencial pedagógico nesta área. Nesta seção serão apresentados de forma resumida alguns trabalhos que tratam do conceito de limite, as quais serão discutidas na seção seguinte, de acordo com os significados apresentados por Fuente, Armenteros e Moll (2012) e também com base no potencial pedagógico explorado no GeoGebra.

Alves, Correia e Melo (2013) buscam tornar o estudo do conceito de limite mais interativo a partir de uma proposta didática com o GeoGebra. Trata-se de uma atividade bastante simples, em que é feita uma análise de uma função descontínua em um dado ponto. Os autores estudam o limite através da manipulação gráfica, utilizando pontos e segmentos de reta para identificar o limite no ponto em que existe a descontinuidade.

Outra proposta é feita por Jardim *et al* (2015). Esta atividade é mais complexa à medida que se trata de um modelo na forma de “quiz”, em que os estudantes são desafiados a analisarem gráficos e responderem perguntas específicas sobre o comportamento do limite de

cada função analisada. Acrescenta-se ainda a possibilidade de utilizar controles deslizantes para a investigação dos limites laterais. A essência desta possibilidade está na resolução de exercícios da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. A elaboração do modelo, no entanto, exige conhecimento aprofundado do software GeoGebra.

Fonseca e Henriques (2016) apresentam uma metodologia de ensino para o conceito de limite desenvolvida com estudantes de um curso de licenciatura em matemática. A sequência de três atividades envolve o cálculo de limites por meios algébricos, a interpretação gráfica/geométrica pelos limites laterais e o estudo da existência do limite em um ponto, e o estudo de funções racionais. São contextualizados também conceitos de geometria. No entanto, a atividade não é descrita integralmente no trabalho, para que outros docentes possam incorporá-la em sua prática pedagógica. É apresentada uma discussão bastante consistente sobre os resultados de aprendizagem dos estudantes que participaram das atividades.

Por último, cita-se o trabalho de Silva e Becker (2018) que apresenta um método a partir de um objeto de aprendizagem elaborado no GeoGebra. O conceito de limite é contextualizado com problemas da geometria que envolvem comprimento e área. São atividades bastante abstratas e que exigem um conhecimento matemático/geométrico com certa complexidade. O modelo é disponibilizado pelos autores para uso livre da comunidade acadêmica.

## **5 Discussão dos resultados**

Inicialmente chama-se a atenção para o fato de que a maioria dos trabalhos que apresentam propostas metodológicas para o ensino de limites com o GeoGebra foi publicada nos últimos cinco anos. Isso evidencia que se trata de um movimento recente de pesquisadores da educação matemática e que, certamente não é um tema esgotado. Nesse sentido, reforça-se a necessidade de análises dessas propostas com o objetivo de identificar possíveis lacunas e/ou ferramentas do GeoGebra que ainda não são explorados de acordo com o seu potencial pedagógico.

As quatro propostas metodológicas apresentadas nos resultados são interessantes para o ensino de limites, uma vez que os seus autores discutem os resultados em sala de aula e relatam efeitos importantes para a aprendizagem. Além disso, são evidenciadas contribuições significativas em relação à investigação matemática com o uso de tecnologias digitais, especialmente sobre a formulação de hipóteses sobre o conceito, discussão e argumentação sobre os resultados, corroborando com a ideia de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003),

apresentada no referencial teórico. Da mesma forma, os relatos chamam a atenção sobre a importância do estudo dinâmico do conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral.

Resultados semelhantes são apresentados por Oliveira, Gonçalves e Piasson (2018), ao realizarem um levantamento de trabalhos que abordam conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, dentre eles, o limite de uma função, com o GeoGebra. Os autores analisam 14 trabalhos da área da educação matemática, tanto de natureza teórica quanto empírica, e concluem que 13 deles apontam para resultados efetivos para a aprendizagem dos estudantes. Os principais pontos destacados são a interação entre aluno e conteúdo, discussão e argumentação em sala de aula, estudo conceitual e resolução de atividades.

A proposta de Alves, Correia e Melo (2013), apesar de ser bastante simples, pode ser importante para uma visualização inicial do conceito de limite. Foi possível identificar dois significados de acordo com aqueles descritos por Fuente, Armenteros e Moll (2012), sendo os significados gráfico e geométrico. Em relação à exploração do GeoGebra, seria possível utilizar as ferramentas de controle deslizante e a janela de Cálculo Simbólico, o que poderia enriquecer ainda mais a atividade e, inclusive, incorporar o significado infinitesimal ao estudo. O significado numérico também pode ser desenvolvido, mas sem o uso do GeoGebra. Para este último, pode-se até sugerir aos estudantes que construam uma tabela em outro software, a citar como exemplo o Excel. Seria importante também que os autores disponibilizassem imagens da análise para facilitar a compreensão de indivíduos que ainda não têm um bom conhecimento do GeoGebra.

Acerca da atividade desenvolvida por Jardim *et al* (2015), não foi possível identificar se os autores disponibilizaram o modelo para que outros docentes ou até estudantes possam utilizar. Entretanto, a partir do que foi exposto no trabalho e da sua discussão, é possível identificar os significados gráfico, geométrico e infinitesimal. Observa-se que as ferramentas do GeoGebra são mais bem exploradas, especialmente os controles deslizantes, que possibilitam uma visualização geométrica muito eficiente. A configuração da proposta busca apoiar os estudantes tanto na visualização do conceito, quando na resolução de exercícios. Da mesma forma, poderia ser incorporado o significado numérico na atividade.

Fonseca e Henriques (2016) não apresentam a proposta na íntegra para os leitores, mas a partir da discussão dos resultados é possível identificar o estudo dos significados gráfico, geométrico, infinitesimal e, possivelmente, de forma implícita, poderá ter sido contemplado o significado numérico. A discussão da proposta é bastante completa, evidenciando os resultados positivos e negativos, mas aqui não é possível discutir as ferramentas do GeoGebra que foram usadas, uma vez que não se tem acesso ao protocolo da atividade.

Por último, o modelo de atividade de Silva e Becker (2018) é mais específico quanto ao público alvo (estudantes de licenciatura em matemática), uma vez que envolve conceitos da geometria e álgebra, com uma abordagem que talvez não seja adequada para estudantes de outros cursos superiores, como as engenharias, por exemplo. No entanto, trata-se de uma proposta também interessante, que envolve os significados geométrico e pré-infinitesimal. Nesse caso, se trata de um modelo programado no software, e que não cabe avaliar se poderiam ser exploradas outras ferramentas.

## **6 Considerações Finais**

Os significados de limite que mais têm sido contemplados nas propostas didáticas são o gráfico e o geométrico, muito provavelmente pelas características e ferramentas disponíveis no GeoGebra. No entanto, é importante que sejam incorporados mais significados às atividades, para que a compreensão do conceito de limite seja mais completa. É provável que estes outros significados sejam estudados em momentos que antecedem ou sucedem as atividades no GeoGebra, e que não tenham sido citadas de forma explícita pelos autores. Ainda assim, é possível que outros docentes possam incorporar estas ideias em suas práticas pedagógicas, adaptando e incorporando outros elementos ou etapas.

É evidente que têm sido feitas boas explorações do software GeoGebra, mas que ainda podem ser complementadas de modo a aproveitar melhor algumas ferramentas disponíveis. Por exemplo, o uso de controles deslizantes é uma forma muito dinâmica de visualizar o limite numa perspectiva de aprendizagem conceitual, mas que tem sido pouco utilizada. A Janela de Cálculo Simbólico não foi utilizada em nenhuma das propostas, sendo que pode ser uma boa alternativa para a resolução de atividades em sala de aula, e até mesmo no estudo do significado infinitesimal do limite de uma função.

A elaboração de propostas didáticas para o conceito de limite ainda é uma questão em aberto da pesquisa em educação matemática. Verificam-se poucas propostas, especialmente que utilizem o software GeoGebra, apesar de todas as suas potencialidades. Os trabalhos disponíveis na literatura evidenciam bons resultados para a aprendizagem a partir das atividades propostas, reforçando a ideia de que é importante que esse processo tenha continuidade na obtenção de atividades ainda mais efetivas e completas, sejam com o GeoGebra, sejam com outras ferramentas tecnológicas. Destaca-se que é importante disponibilizar as sequências didáticas para que outros docentes e/ou alunos possam também aproveitar as suas potencialidades, a exemplo do que fazem Silva e Becker (2018).

## 7 Agradecimento

Os autores agradecem a Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões pelo apoio através de bolsa de iniciação científica.

## 8 Referências

ALVES, A. D.; CORREIA, L. M. B.; MELO, E. R. **Explorando os conceitos iniciais da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral utilizando o software GeoGebra**. In. XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013. Curitiba, PR. Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo: FE-USP, 1999.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012. 104p. Coleção Tendências em Educação Matemática, 2.

BORBA, M. C.; SILVA, R. S. R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 1ª Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

FONSECA, V.; HENRIQUES, A. **A aprendizagem do conceito de limite de funções com recurso a tarefas exploratórias e ao GeoGebra**. Atas do Encontro em Investigação em Educação Matemática, 2016.

FUENTE, Á. C.; ARMENTEROS, M. G.; MOLL, V. F. Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42B, p. 667-690, abr. 2012.

GARZELLA, F. A. C. **A disciplina Cálculo 1: análise das relações entre as práticas pedagógicas do professor e seus impactos nos alunos**. 2013. Tese (doutorado). Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, 2013.

JARDIM, D. F.; SILVA, J. M. PEREIRA, M. M.; SOARES JUNIOR, E. A.

NEPOMUCENA, T. V. Estudando limites com o GeoGebra. **Revista Vozes dos Vales**. Ano IV, n. 8, p. 1-19, out., 2015.

MOTTA, M. S.; ROLIM, M. R. L. B.; SILVEIRA, I. F.; ARAÚJO JUNIOR, C. F. O uso de tecnologias educacionais no desenvolvimento da aprendizagem matemática. In. **Revista Ceciliana**. Santos – SP, ano 22, nº 32, p. 153-162, 2011.

OLIVEIRA, R. A.; GOLÇALVES, W. V.; PIASSON, D. O uso do GeoGebra para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, um mapeamento de suas publicações. **Revista Thema**, Pelotas, RS, v. 15, n. 2, p. 466-484, 2018.

PAGANI, E. M. L.; ALEVATTO, N. S. G. Ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: um mapeamento das teses e dissertações produzidas no Brasil. **Revista Vidya**, Santa Maria, RS, v. 34, n. 2, p. 61-74, 2014.

PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 152p.

RESENDE, W. M. **O ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. São Paulo. Diss. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, USP, 2003.

RICHIT, A.; FARIAS, M. M. **Cálculo diferencial e integral e tecnologias digitais: perspectivas de exploração no software GeoGebra**. In. I CEMACYC, República Dominicana, 2013.

SILVA, A. J.; BECKER, F. Processos da construção de conceitos matemáticos com o GeoGebra: o caso do limite de funções reais. **Projeção e Docência**, v. 9, n. 2, p. 188-198, 2018.

STEWART, J. **Cálculo**. Volume 1, São Paulo: Cengage Learning, 2012.

VIEIRA, A. R. L.; RIOS, P. P. S. Aprendizagem significativa e a estratégia do uso de mapas conceituais no ensino de Cálculo Diferencial e Integral no curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 39, n. 2, p. 93-102, 2019.

WISLAND, B.; FREITAS, M. C. D.; ISHIDA, C. Y. Desempenho acadêmico dos alunos em curso de Engenharia e Licenciatura na disciplina de Cálculo I. **Iberoamerican Journal of Industrial Engineering**, Florianópolis, SC, v. 6, n. 11, p. 94 – 112, 2014.