

VIII Jornada Nacional de
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
XXI Jornada Regional de
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Educação Matemática: identidade
em tempos de mudança
06 a 08 de maio de 2020



ANÁLISE DE ERROS NO CÁLCULO DA SUPERFÍCIE DE EMBALAGEM CILÍNDRICA

Paulo César Oliveira
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
paulodfqm@gmail.com

Rodrigo Rodolfo Baltazar de Souza
Colégio Politécnico de Sorocaba
prof.rodrigobaltazar@gmail.com

Eixo Temático: E4 – Práticas e Intervenções na Educação Básica e Superior

Modalidade: comunicação oral

Resumo

Este trabalho teve como objetivo a classificação e a análise dos erros apresentados nas respostas dos alunos em uma sequência de tarefas, que teve como objetivo comparar a área da superfície cilíndrica de embalagens de leite condensado com diferentes dimensões. A pesquisa foi norteada pela seguinte questão de investigação: quais foram os erros apresentados com maior frequência pelos alunos e suas implicações na atividade matemática? A pesquisa foi de natureza qualitativa e a produção de informações envolveu os registros escritos dos estudantes. A análise dos protocolos escritos dos alunos foi feita com base na Taxionomia dos erros proposta por Rafaella Borasi. Como resultado, apontamos que o erro de arredondamento dos números decimais teve a maior frequência. Este erro comprometeu a resolução das tarefas propostas, pois o seu conteúdo envolveu a transição do registro algébrico para o registro numérico. A medida que os cálculos foram sendo realizados, o erro no arredondamento se propagou, ocasionando dificuldades na identificação a embalagem cilíndrica com menor área de superfície.

Palavras-chave: Geometria. Sólido geométrico. Taxonomia de erros.

1 Introdução

O conteúdo deste relato de experiência teve sua motivação a partir do conhecimento do artigo ‘Embalagens’, no qual Santos e Baccarin (2006, p.10) analisaram o cálculo da superfície de paralelepípedos em caixas de sabão em pó, a partir da observação dos autores sobre várias marcas de sabão em pó que tiveram “uma mudança na embalagem de 1kg: passaram de um paralelepípedo ‘mais estreito e alto’ para um ‘mais largo e baixo’.

Santos e Baccarin (2006, p.11) constataram pelos seus resultados de cálculos que “a caixa atual utiliza menos material para ser confeccionada que a caixa antiga”.

Buscamos avaliar se outros produtos vendidos em supermercado sofreram mudanças em suas embalagens. Neste sentido, verificamos que a lata cilíndrica do leite condensado

Itambé e Moça sofreu mudança em sua embalagem, levando em conta a invariância no volume do cilindro.

O texto que apresentamos é fruto de uma pesquisa desenvolvida no âmbito da Licenciatura em Matemática da UFSCar. Elaboramos uma sequência didática sobre este assunto para uma turma de 9 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede particular do município de Sorocaba, Estado de São Paulo. A produção escrita dos alunos foi submetida à análise dos erros; o aporte teórico-metodológico que apresentamos na seção a seguir.

2 Análise de erros na aprendizagem

O desenvolvimento teórico-metodológico dessa pesquisa baseou-se no livro ‘Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos’ de Cury (2007), o qual contém a taxionomia dos erros desenvolvida por Borasi (1996).

A teoria da análise de erros é um campo de estudos da Educação Matemática que tem influências das teorias do campo da Pedagogia como da Psicologia, e que se modificou e se adaptou através do tempo, se adequando as teorias vigentes de cada período.

Em meados dos anos 80, a pesquisadora italiana Raffaella Borasi apresentou uma abordagem da análise de erros que se diferenciava das apresentadas anteriormente, na qual buscava ampliar as possibilidades da aplicação da análise de erros no processo de ensino-aprendizagem, não se atendo tão somente no sentido de identificar e classificar os erros cometidos pelos alunos, mas como apoio ao processo de aprendizagem.

Em seu livro, Cury (2007) fez adaptações e simplificações na descrição, identificação e classificação dos erros proposta por Borasi (1996), conforme conteúdo do quadro 1:

Quadro 1 - Taxionomia dos erros.

<i>Objetivo da aprendizagem</i>	<i>Nível de discurso Matemático</i>		
	<i>Realização de uma tarefa matemática específica</i>	<i>Compreensão de algum conteúdo técnico-matemático</i>	<i>Compreensão sobre a natureza da Matemática</i>
<i>Remediação</i>	Análise de erros detectados, para compreender o que houve de errado e corrigir a tarefa com sucesso.	Análise de Erros detectados, para esclarecer más interpretações de um conteúdo técnico-matemático.	Análise de erros detectados, para esclarecer más interpretações sobre a natureza da Matemática e de conteúdos específicos.

<i>Descoberta</i>	Uso construtivo de erros no processo de resolução de um novo problema ou tarefa; monitoramento do trabalho de alguém, para identificar potenciais enganos.	Uso construtivo de erros ao aprender novos conceitos, regras, tópicos, etc.	Uso construtivo de erros ao aprender sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.
<i>Pesquisa</i>	Erros e resultado intrigantes motivam questões que geram pesquisas em novas direções e servem para desenvolver novas tarefas matemática.	Erros e resultado intrigantes motivam questões que podem levar a novas perspectivas sobre um conceito, regra ou tópico não contemplado no planejamento original.	Erros e resultado intrigantes motivam questões que podem levar a <i>insights</i> e perspectivas inesperadas sobre a natureza da Matemática ou de algum conteúdo matemático.

Fonte: Cury (2007, p.37)

A aplicação destas nove maneiras de se usar os erros pode aparecer separada ou combinada. Um exemplo da ocorrência dessas junções é apresentado por Cury (2007, p.38):

[...] em um determinado momento, um professor pode estar interessado apenas em remediar os erros que detecta nas produções de seus alunos, mas, posteriormente, ou com outra turma, pode encontrar um resultado intrigante que o leva a aprofundar-se no conteúdo matemático ou, mesmo, a propor a seus alunos que se engajem com ele na pesquisa.

Cury (2007) relatou que de todas as experiências desenvolvidas por Borasi com uso dos erros, destaca-se as discussões registradas pela pesquisadora, que permitiram não só o desenvolvimento de sua própria pesquisa sobre erros, como também a utilização desses erros para o ensino de Matemática.

No contexto brasileiro podemos expor pesquisas cujo propósito foi relacionar o erro e suas implicações na aprendizagem de conteúdos matemática. Fuck (2013) apresentou uma investigação qualitativa, a fim de responder o seguinte problema de investigação: quais são os tipos de erros mais frequentes em questões de área e perímetro de quadrados e retângulos, cometidos por alunos da Educação de Jovens e Adultos?

Para atender ao objetivo da pesquisa, Fuck (2013) aplicou um teste com 34 alunos e os principais resultados foram: ausência de relação dos conceitos de área e perímetro com o contexto; desconhecimento da característica dos quadrados referente à assertiva de que todos os lados do polígono apresentam a mesma medida; confusão nas operações matemáticas envolvidas nos cálculos de área e perímetro; equívocos conceituais das grandezas.

Santos (2014), em sua dissertação de Mestrado, teve como objetivo analisar e classificar os erros cometidos por estudantes do 3º ano do Ensino Médio, na resolução de

questões de Geometria do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), de cinco Escolas estaduais do município de Maringá.

A pesquisa teve caráter qualitativo e desenvolveu-se em uma única etapa com a aplicação de um teste composto por quatro questões extraídas de exames anteriores do ENEM. Os resultados evidenciados por Santos (2014) indicaram que os principais erros cometidos pelos estudantes na resolução das questões de Geometria estão entre as dificuldades com a interpretação das questões, a passagem da linguagem natural para a linguagem matemática e a aplicação e resolução de fórmulas.

Nossa pesquisa, assim como os trabalhos de Fuck (2013) e Santos (2014), buscam identificar os erros dos alunos e suas implicações no estudo de conteúdos geométricos.

3 Percurso metodológico

A pesquisa de natureza qualitativa envolveu como produção de informação os registros escritos dos alunos, cuja sistematização deu-se com a análise do conteúdo de erros proposto por Brum e Cury (2013), dividida em três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Na pré-análise para cada aluno foi designado um código, sendo assim preservando sua identidade, nesta pesquisa optou-se em nomeclar os alunos com os códigos A1 a A9. Em seguida, o material com as respostas dos alunos foram fotocopiados, para assim ser organizado em sequência, facilitando a correção e análise.

Ao iniciar a fase de exploração do material se realizou a classificação das respostas em corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco. As respostas incorretas e parcialmente corretas formaram o corpus para a análise e categorização.

Na última fase, tratamento dos resultados, foram descritos os erros encontrados em cada categoria, bem como elaboração de quadro-síntese dos resultados obtidos. Durante a aplicação da tarefa composta por cinco itens, foi permitido o uso da calculadora, pois pelo volume de operações realizadas, o uso da calculadora se tornou necessário para agilizar os processos, entretanto, foi solicitado aos alunos que apresentassem o desenvolvimento completo das suas resoluções.

4 O conteúdo da tarefa

Na pesquisa de campo, foi observado em um determinado supermercado duas embalagens do mesmo produto (leite condensado) com medidas distintas:

Moça: 9,9 cm (altura) e 20,8 cm (circunferência)

Itambé: 8,0 cm (altura) e 23,2 cm (circunferência)

Resolva os seguintes itens propostos:

- Determine os raios das circunferências das embalagens de leite condensado, utilizando $\pi = 3,14$.
- Dado que o volume é constante e suficiente para conter 395 g de leite condensado, escreva a expressão da altura do sólido em função do raio da base.
- Escreva a expressão da área superficial do sólido em função do raio da base.
- Construa uma tabela que relaciona a área superficial do sólido em função do raio da base.
- Analise os dados e responda: as diferenças nas dimensões pode produzir, dado um volume fixo, uma economia de material para produzir a embalagem cilíndrica?

Para cada um dos cinco itens inserimos o que desejamos que o aluno seja capaz de desenvolver em termos de atividade matemática.

O *item a* busca mobilizar os conhecimentos relativos a medidas das dimensões de um cilindro e as relações entre seus elementos. Neste caso, foi observado se o aluno consegue relacionar a medida da circunferência, do diâmetro e do número π (pi), e assim obter a medida o raio da base de cada um das latas, obtendo os valores dispostos no quadro 2:

Quadro 2 - Valores dos raios da base das latas

marca	Comprimento (cm)	Diâmetro (cm)	Raio (cm)
Moça	20,8	6,6	3,3
Itambé	23,2	7,4	3,7

Fonte: Arquivo da pesquisa

No *item b* é desejável que os alunos sejam capazes de realizar procedimentos algébricos adequados que permitam obter uma expressão que venha a representar a altura do sólido em função do raio da base é

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 334 = 3,14 \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{334}{3,14 \cdot r^2} \Rightarrow h = \frac{106,4}{r^2}$$

Já no *item c*, a área total (A_t) da superfície de um cilindro é a soma do valor da área lateral (A_l) com a área das duas bases do cilindro (A_b).

O cálculo da área lateral é dado por: $A_l = 2\pi r h = 2 \cdot 3,14 \cdot r \cdot (106,4/r^2) = 668,2/r$.

A área da base do cilindro em função do raio é dada por $A_b = \pi r^2 = 3,14r^2$. Portanto, área total (A_t) da superfície é $668,2/r + 6,28 \cdot r^2$

No *item d*, temos como objetivo verificar se o aluno consegue verificar o comportamento das variáveis envolvidas, por meio da construção de uma tabela.

Por fim, no *item e* espera-se que os alunos concluam que há uma maior economia de material ao se produzir a lata da marca Itambé do que ao produzir a lata da marca Moça, conforme dados dispostos no quadro 3:

Quadro 3 - Cálculo da área das latas de leite condensado

<i>Leite condensado</i>	<i>Raio (cm)</i>	<i>Área total (cm²)</i>
<i>Moça</i>	3,3	270,87
<i>Itambé</i>	3,7	266,57

Fonte: Arquivo da pesquisa

Na próxima seção apresentamos a classificação e análise dos erros em cada item da tarefa. Para estabelecer a classificação dos erros, foi levado em conta o primeiro erro cometido na resolução, pois o estudante, ao continuar a sua resolução, pode cometer outros tipos de erro.

5 Análise dos Resultados

Os alunos tiveram ao todo 4 horas-aulas para completar realizar a atividade matemática. A maioria dos alunos levou duas horas-aula para completar a atividade referente aos itens *a*, *b* e *c*; mais uma hora-aula para completar os demais itens. Foi disponibilizado mais 1 hora-aula para o debate dos alunos quanto as resoluções obtidas.

Os protocolos escritos dos 9 alunos foram cuidadosamente analisadas para assim realizarmos a classificação parcial de cada um dos erros apresentados pelos alunos, conforme tabela 1:

Tabela 1 - Distribuição das respostas dos alunos.

<i>Tarefa</i>	<i>Correta</i>	<i>Parcialmente Correta</i>	<i>Incorreta</i>	<i>Branco</i>
<i>Item a</i>	2	3	4	0
<i>Item b</i>	1	2	6	0
<i>Item c</i>	0	2	7	0
<i>Item d</i>	0	1	8	0
<i>Item e</i>	1	0	6	2

Fonte: Arquivo da pesquisa

A categoria ‘parcialmente correta’ contemplou a solução próxima do esperado, entretanto por algum erro cometido, ocorre uma divergência do resultado esperado. A categoria ‘branco’ é quando o aluno deixou de responder itens da tarefa.

A codificação dos erros dos alunos será numerada partindo de E1, que vem a ser o primeiro erro observado na análise das respostas dos alunos. A análise das respostas (quadro 4) se iniciou do *item a* para o *item e*, e do aluno A1 para o aluno A9, sendo que a análise do próximo item só ocorreu após esgotar todos os erros apresentados pelos alunos no item anterior. Elaboramos o ‘quadro 4’ com a apresentação de 16 erros codificados:

Quadro 4 - Erros presentes nas tarefas propostas.

<i>Tarefa</i>	<i>Erros apresentados nas respostas da tarefa</i>
a) Determine os raios das circunferências das embalagens de leite condensado, utilizando $\pi = 3,14$.	<i>E1</i> : Realiza o arredondamento de maneira incorreta; <i>E2</i> : Realiza a divisão errada entre números reais; <i>E3</i> : Determina o valor da medida do raio por meio da divisão da medida da circunferência pela medida do diâmetro; <i>E4</i> : Apresenta um valor diferente do apresentado no enunciado; <i>E5</i> : Inclui termos desnecessários para solução da tarefa; <i>E6</i> : Desaparece com termo presente na expressão anterior; <i>E7</i> : Confunde o sinal de igualdade com o sinal de adição; <i>E8</i> : Aplica de maneira errada o princípio multiplicativo da igualdade.
b) Dado que os volumes calculados são suficientes para embalar 395g de leite condensado, vamos considerar um volume constante. Escreva a expressão da altura do sólido em função do raio da base.	<i>E1</i> : Realiza o arredondamento de maneira incorreta; <i>E6</i> : Desaparece com termo presente na expressão anterior; <i>E8</i> : Aplica de maneira errada o princípio multiplicativo da igualdade.
c) Escreva a expressão da área superficial do sólido em função do raio da base.	<i>E1</i> : Realiza o arredondamento de maneira incorreta; <i>E6</i> : Desaparece com termo presente na expressão anterior; <i>E9</i> : Ao multiplicar um número decimal por uma fração, efetua a multiplicação deste número com o numerador e o denominador da fração; <i>E10</i> : Realiza a multiplicação errada entre números reais; <i>E11</i> : Realiza multiplicação de monômios de forma incorreta; <i>E12</i> : Realização adição de monômios semelhantes de forma incorreta; <i>E13</i> : Deixa de realizar a propriedade distributiva.
d) Construa uma planilha da área superficial do sólido em função do raio da base.	<i>E1</i> : Realiza o arredondamento de maneira incorreta; <i>E2</i> : Realiza a divisão errada entre números reais; <i>E10</i> : Realiza a multiplicação errada entre números reais; <i>E14</i> : Apresenta dados incompatíveis com a expressão utilizada; <i>E15</i> : Realiza as operações entre números reais em ordem incorreta; <i>E16</i> : Confunde as operações a serem realizadas;

Fonte: Arquivo da pesquisa

Para o *item a* foram analisadas as respostas apresentadas por sete dos participantes desta pesquisa, no caso, os alunos A2 ao A8, sendo que os alunos A1 e A9 foram os únicos que apresentaram resposta correta, e portanto, suas respostas foram descartadas para esta análise.

O erro relacionado ao arredondamento realizado de maneira incorreta (E1) ocorreu em todas as respostas analisadas, em sua maioria o erro estava relacionado no arredondamento para uma casa decimal. Durante a aplicação da tarefa pelo professor-pesquisador, foi sugerido aos alunos que realizassem o arredondamento dos números para uma casa decimal.

A norma da Associação Brasileira de Normas Técnicas- ABNT estabelece as seguintes regras de arredondamento de números decimais:

- Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último a ser conservado for inferior a 5, o último algarismo a ser conservado permanecerá sem modificação [...];
- Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo a ser conservado for superior a 5, ou, sendo 5, for seguido de no mínimo um algarismo diferente de zero, o último algarismo a ser conservado deverá ser aumentado de uma unidade [...];
- Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo a ser conservado for 5 seguido de zeros, deve-se arredondar o algarismo a ser conservado para o algarismo par mais próximo. Consequentemente, o último algarismo a ser retirado, se for ímpar, aumentará uma unidade [...];
- Quando o algarismo imediatamente seguinte ao último algarismo a ser conservado for seguido de zeros, se for par o algarismo a ser conservado, ele permanecerá sem modificação. [...] (ABNT, NBR 5891, 2014, p.1)

Entretanto, ao buscar nos materiais didáticos utilizados pelos alunos participantes da pesquisa, nos anos anteriores, encontramos as seguintes regras para o arredondamento de números decimais:

- Arredondamos “para cima” se o algarismo à direita do algarismo da ordem que se vai arredondar é 5, 6, 7, 8 ou 9.
 $16,79 \rightarrow 16,80$ ou $16,8$
- Mantemos a ordem que se vai arredondar quando o algarismo à direita dessa ordem é 0, 1, 2, 3 ou 4.
 $16,74 \rightarrow 16,70$ ou $16,7$ (DANTE, 2014, p. 33)

Dada a divergência, optamos por considerar somente como erro as regras de arredondamento que não condizem com as normas da referida ABNT.

Entre as respostas que apresentaram este erro, destacamos a resolução do aluno A2 e A6, que ao efetuar a divisão entre o número 23,2 por 3,14, arredondou o valor obtido para 7,3 (Figura 1 e 2). Porém, ao realizar a divisão o arredondamento correto é 7,4; um erro repetido por todos os alunos observados.

Figura 1 - Resposta apresentada pelo aluno A2 para o item a.

The image shows handwritten work on a grid background. At the top, it says "também $\rightarrow 3,14 = 23,2$ ". Below this, there is a division: $3,14 \overline{) 23,2}$. To the left of this division is the label "E1". A red dashed box encloses the division and the result $D = 23,2$. Below the box, the student has written $D \approx 7,3 \text{ cm}$ and $r = 3,65 \text{ cm}$.

Fonte: Arquivo da pesquisa

De acordo com Cury (2007), pela taxionomia de erros, a identificação da má interpretação no arredondamento dos números decimais refere-se à compreensão do conteúdo em nível de procedimento, designado no ‘quadro 1’ como conteúdo técnico-matemático.

Na ‘figura 1’ o valor do raio da base é exato. Já na ‘figura 2’ o aluno A6 apresentou o valor truncado para o raio, ou seja, desprezou a segunda casa decimal. Em termos de compreensão de conteúdo técnico-matemático, o aluno A6 teve êxito.

Figura 2 - Resposta apresentada pelo aluno A6 para o item a.

The image shows handwritten work on a grid background. At the top, it says "também $3,14 = 23,2$ ". Below this, there is a division: $3,14 \overline{) 23,2}$. To the left of this division is the label "E1". A red dashed box encloses the division and the result $D = 7,3$. To the right of the box, the student has written $7,3 = 2$ and $R = 3,6$.

Fonte: Arquivo da pesquisa

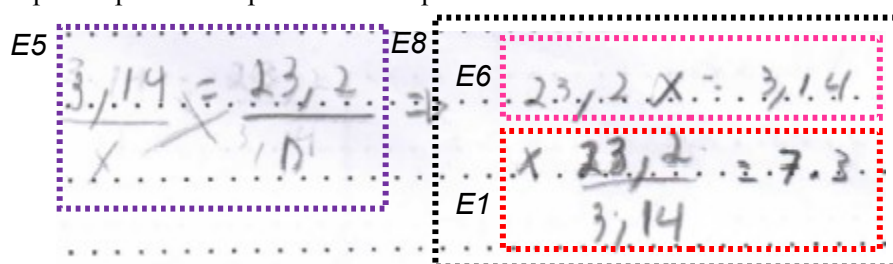
Nas entrevistas realizadas com os alunos observou-se que a maioria deles não sabia efetuar arredondamento de forma correta, pois este erro foi repetido na maioria dos demais itens da tarefa proposta para os alunos. Destaca-se que o único aluno que apresentou domínio sobre o processo de arredondamento, e que errou este processo nas tarefas solicitadas, foi o aluno A2, que mesmo apresentando dificuldade em se expressar, mostrou que compreende que quando o algarismo a ser eliminado for maior ou igual a cinco acrescenta-se uma unidade ao primeiro algarismo que está situado à esquerda e, se for menor do que cinco, deve-se manter inalterado o algarismo da esquerda. Os demais alunos responderam que não sabiam efetuar o arredondamento, ou mantinham inalterado o algarismo dos décimos, apresentados na divisão.

Com base em Cury (2007), o uso de entrevista do professor-pesquisador com seus alunos através de questões abertas, permitiu o monitoramento do trabalho deles, com o

objetivo de identificar os potenciais enganos em termos de arredondamento ou, como no caso do aluno A2, o erro foi ocasionado pelo uso inadequado da linguagem escrita.

O erro E5 foi observado no aluno A8, devido à inclusão desnecessária do termo ‘x’ no denominador do número decimal 3,14. Ao efetuar as operações para a proporcionalidade construída, o aluno A8 retirou o termo ‘D’ que representa o diâmetro, para calcular o valor de ‘x’. Ao ser questionado pelo professor, A8 relatou que colocou o ‘x’ ao invés do número ‘1’ e trocou o termo ‘D’ por ‘x’, pois para ele é mais fácil de calcular com o ‘x’, o que denota dificuldades com o pensamento algébrico, de acordo com a figura 3:

Figura 3 - Resposta apresentada pelo aluno A8 para o item a.



Fonte: Arquivo da pesquisa

Vale ressaltar que, na condição de professor, esse aluno apresenta muito dificuldade em matemática, principalmente quando tem que realizar as atividades de maneira autônoma, ou seja, sem a nossa intervenção.

No *item b*, somente um aluno apresentou solução correta. Dois outros alunos apresentaram solução parcialmente correta, devido ao erro associado ao arredondamento (E1).

Ao estabelecer o valor para a medida do volume, os alunos em conjunto optaram por escolher o valor 334 cm³ como volume constante, entretanto esta não é a melhor medida para o volume solicitado, que se encontra entorno de 342 cm³ para as dimensões utilizadas na atividade, porém para não interferir nas medidas dos raios encontradas pelos alunos, optou-se em manter o valor obtido por eles. A partir da relação algébrica para o volume do cilindro,

$$\text{temos: } V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 334 = 3,14 \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{334}{3,14 \cdot r^2} \Rightarrow h = \frac{106,4}{r^2}$$

Os alunos A2, A5 e A6, ao efetuarem a divisão do número 334 por 3,14 obtiveram o valor 106,3 (figura 4) pelo truncamento de 106,369. Em termos de arredondamento em uma casa decimal, o valor de 106,369 resulta em 106,4.

Figura 4 - Resposta apresentada pelo aluno A2 para o item b.

$334 = 3,14 \cdot r^2 \cdot h$

E1

$$\frac{334}{3,14} = r^2 \cdot h$$

$$\frac{106,3}{r^2} = h$$

Fonte: Arquivo da pesquisa

Outro tipo de erro foi protagonizado pelo aluno A7 que efetuou a subtração do número 334 pelo número 3,14 obtendo 330,8; resultando na aplicação equivocada do princípio multiplicativo conforme protocolo apresentado na figura 5:

Figura 5 - Resposta apresentada pelo aluno A7 para o item b.

E8

$$334 = 3,14 \cdot r^2 \cdot h$$

$$r^2 = 3,14 + 334 = h$$

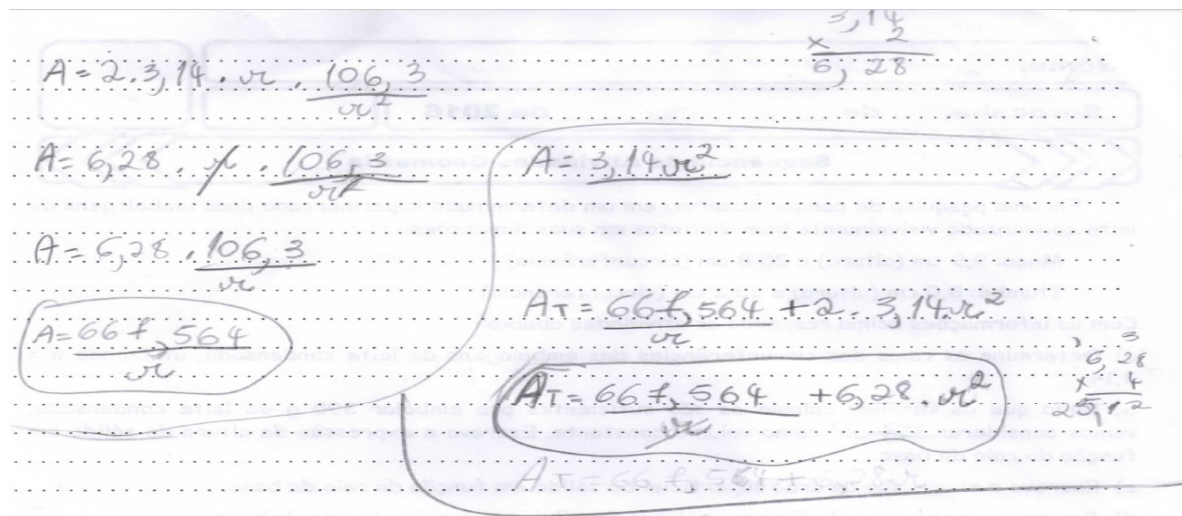
$$330,8 = r^2 = h$$

Fonte: Arquivo da pesquisa

O erro do aluno A7, de acordo com Cury (2007), consiste em má interpretação do princípio multiplicativo utilizado em uma sentença matemática envolvendo a igualdade. Trata-se de um erro envolvendo a natureza da Matemática, especificamente, a Aritmética dos números inteiros.

No *item c* nenhum aluno apresentou a solução esperada. Dois alunos (A2 e A9) apresentaram solução próxima daquela esperada ($668,2/r + 6,28r^2$), com erro associado ao arredondamento (E1). Tal equívoco foi decorrente do valor obtido no *item b*, pois ambas resoluções com aspectos de desorganização, não tiveram erros no tratamento do registro algébrico, de acordo com a figura 6:

Figura 6 - Resposta apresentada pelo aluno A2 para o item c.



Fonte: Arquivo da pesquisa

No item *d*, novamente nenhum dos alunos apresentou a solução esperada. Decorrente dos erros cometidos no item *c*, apenas o aluno A2 teve sua resolução classificada como parcialmente correta. Entendemos que o erro desse aluno foi o E14, aquele que apresenta dados incompatíveis com a expressão utilizada. Apresentamos a ‘figura 7’ com os resultados obtidos por A2:

Figura 7 - Dados apresentados pelo aluno A2 para o item d.

raio (cm)	Área superficial
1	647,844 cm ²
1,5	454,942 cm ²
2	347,342 cm ²
2,5	282,452 cm ²
3,0	241,341 cm ²
3,3	223,016 cm ²
3,5	212,412 cm ²
3,65	205,816 cm ²
4,0	197,011 cm ²
4,5	186,644 cm ²
5,0	164,412 cm ²
5,5	155,152 cm ²

Fonte: Arquivo da pesquisa

Os valores relativos à área superficial divergem dos resultados conferidos pelo professor. Por exemplo, para o raio de 3,3cm, a área superficial é de 270,71cm². Trata-se de um valor muito além daquele obtido por A2 na ‘figura 7’, ou seja, 223,016 cm². Como o protocolo escrito do aluno A2 não contém o processo para obter os valores apresentados, ao ser questionado pelo professor, constatou-se que o aluno realizou todos os procedimentos somente na calculadora, no qual pelo manuseio incorreto pode ter acarretado o erro apresentado.

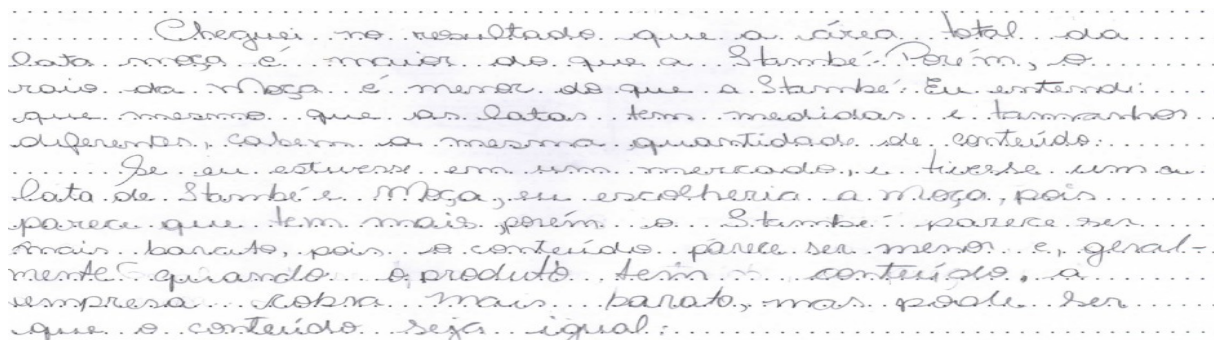
De acordo com Cury (2007), a descoberta do erro no protocolo escrito do aluno A2 possibilitou ao professor-pesquisador instigar o aluno a revisar a atividade matemática a partir

do uso da fórmula da área da superfície cilíndrica e constatar que a situação de fracasso reverteu em êxito. Ao refazer e registrar os procedimentos para alguns valores da tabela, o aluno *A2* mostrou-se capaz de obter os valores esperados corretamente.

Os erros cometidos nos itens anteriores comprometeram o desempenho de oito alunos quanto ao *item e*, impossibilitando a avaliação do material necessário para produzir a embalagem cilíndrica. Esperava-se que os alunos concluíssem que há uma maior economia de material ao se produzir a lata da marca Itambé do que ao produzir a lata da marca Moça, principalmente se a análise fosse projetada em escala industrial, ou seja, em milhões de unidades produzidas. E, por meio dessa diferença justificar que a variabilidade do preço da lata de leite condensado Moça supera em R\$1,00 a marca Itambé, nos hipermercados do município de Sorocaba, segundo a enquete realizada pelos autores no momento de escrita deste texto.

A redação da resposta para o *item e* por parte dos alunos foi permeada por aspectos subjetivos como preço ou tradição da marca Moça no mercado, em detrimento da análise de aspectos quantitativos, de acordo com o conteúdo da resposta do aluno *A9* na figura 8, por exemplo:

Figura 8 - Argumento do aluno *A9*.



..... Cheguei no resultado que a área total da
lata Moça é maior do que a Itambé. Porém, o
raio da Moça é menor do que a Itambé. Eu entendi
que mesmo que as latas tem medidas e tamanhos
diferentes, contém a mesma quantidade de conteúdo
..... Se eu estivesse em um mercado, e tivesse um
lata de Itambé e Moça, eu escolheria a Moça, pois
mais barato, pois o conteúdo parece ser menor e, geral-
mente quando é produzido tem o conteúdo, a
empresa cobra mais caro, mas pode ser
que o conteúdo seja igual.

Fonte: Arquivo da pesquisa

Nas duas primeiras frases do aluno *A9* do quadro 3 há argumentos que poderiam ser analisados de forma quantitativa, se fossem resgatados os valores da tabela do ‘item d’, e confrontados com a seguinte questão: a medida que aumentamos o raio da base da lata cilíndrica, a área total da superfície diminui?

Elaboramos a ‘tabela 2’ condizente ao *item d*, para ilustrarmos um esboço de resposta a nossa indagação:

Tabela 2 - Cálculo da área total em função do raio da base

Raio (cm)	Área (cm ²)
1	674,48
1,5	459,60

2	359,22
2,5	306,53
3	279,25
3,3	270,87
3,7	266,57
4	267,53
4,5	275,66
5	290,64

Fonte: Arquivo da pesquisa

As grandezas raio e área não são inversamente proporcionais, pois no intervalo entre 3,7cm e 4cm temos uma mudança de comportamento na grandeza área. Como proposta de intervenção pedagógica, o professor pode sugerir a análise gráfica dessas variáveis.

6 Considerações Finais

Procurou-se neste trabalho classificar e analisar os erros apresentados por alunos do 9º ano do ensino fundamental, de modo a responder quais foram os erros apresentados com maior frequência pelos alunos e suas implicações na atividade matemática. Com o apoio da taxionomia dos erros contemplamos a remediação e a descoberta como objetivos de aprendizagem.

No que diz respeito à remediação detectamos a interpretação equivocada do arredondamento de números decimais. Na maioria dos casos deste tipo de erro, o que os alunos fizeram foi a aplicação da técnica do truncamento. Identificamos também erros envolvendo a natureza da Matemática em conteúdos específicos, no caso, a Aritmética dos números inteiros, no que diz respeito à operação de multiplicação.

Em relação à descoberta como objetivo de aprendizagem, o monitoramento das atividades dos alunos via entrevista permitiu o professor-pesquisador dar oportunidade para alunos que cometeram erros de tentar rever uma situação de fracasso escolar em sucesso. Como resultado de pesquisa constatamos a importância de instigar o aluno a utilizar diferentes formas de expressar a linguagem matemática, propiciando autonomia na análise dos seus próprios erros.

Apresentamos neste trabalho além da análise do protocolo escrito dos alunos, o uso da entrevista com questões abertas para avançarmos em relação à Taxionomia dos erros. É notório a importância da identificação dos erros proposta por Cury (2007), porém, não suficiente para o processo ensino-aprendizagem. A intervenção do professor em situações de

fracasso escolar, decorrentes da produção de erros, desencadeou ações de auto-avaliação dos estudantes na atividade matemática produzida, revertendo erro em êxito escolar.

A lacuna quanto à capacidade de trabalhar adequadamente no arredondamento dos números decimais comprometeu o objetivo da tarefa proposta quanto ao estabelecimento de conexões internas entre geometria, álgebra e medidas.

Os resultados dessa pesquisa revelou o quão é importante o professor abordar em sala de aula, tarefas envolvendo medidas de grandezas contínuas para diagnosticar a capacidade dos alunos em representar resultados numéricos utilizando o arredondamento quando necessário. Acrescenta-se a necessidade do papel mediador do professor em instigar seus alunos na análise das implicações desse tipo de aproximação através do arredondamento decimal, em procedimentos numéricos sucessivos, como foi o caso da determinação da área da superfície cilíndrica que envolveu várias o uso de várias relações métricas.

7 Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 5891*: Regras de arredondamento na numeração decimal, Rio de Janeiro, 2ª ed, 2014.
- BORASI, R. **Reconceiving mathematics instruction**: a focus on errors. Norwood, N.J.: Ablex Publishing Corporation, 1996.
- BRUM, L.D.; CURY, H.N. Análise de erros em soluções de questões de álgebra: uma pesquisa com alunos do ensino fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v.4, n.1, p.45-62, 2013.
- CURY, H.N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2007. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- DANTE, L.R. **Sistema de ensino Ser**: ensino fundamental II, 6º ano, caderno 4, matemática. 2ª edição. São Paulo: Bercrom Gráfica e Editora, 2014.
- FUCK, R.S. **Análise de erros em geometria**: uma investigação com alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA). **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v.4, n.2, p.16-36, 2013.
- SANTOS, R.C., BACARIN, S.A.O. Embalagens. **Revista do Professor de Matemática**: Rio de Janeiro, n.60, p.10-12, 2006.
- SANTOS, R. R. **Análise de erros em questões de Geometria do ENEM**: um estudo com alunos do Ensino Médio. 2014. 60p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional). Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2014.