O DESAFIO DO ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR NUM [NEM TÃO] NOVO CONTEXTO TECNOLÓGICO

Clarice Favaretto Salvador
cfavarettosalvador@gmail.com

Eixo Temático: E4 – Práticas e Intervenções na Educação Básica e Superior

Modalidade: Comunicação Científica

Resumo

Este trabalho traz, basicamente, um pequeno conjunto de exemplos com os quais se pretende propor uma radical mudança no modo como é ensinada a Álgebra Linear. Não é tanto uma desconstrução quanto uma defesa do uso de tecnologias e *softwares* especialmente em disciplina de serviço. Pesquisas nesse sentido indicam que, fazendo o aprendizado e a prática serem intimamente ligadas à modelagem matemática de fenômenos reais e ao uso de tecnologias avançadas com *softwares* atuais permitindo incluir situações-problemas verdadeiras com vistas a uma aprendizagem que faça sentido numa educação crítica. Os exemplos citados o são com o intuito de estimular mais pesquisas em Educação Matemática que possam dar sustentação a mudanças tão necessárias ao atual estado de ensino de Álgebra Linear.

Palavras-chave: Álgebra Linear, Modelagem Matemática, Aplicações, Vida Real, Motivação.

1 Introdução

Como professores, vimos há muito tempo convivendo com as dificuldades e, em alguns casos, uma ojeriza, de alunos de graduação com relação à disciplina de Álgebra Linear, com consequentes elevados índices de evasão e reprovação. No entanto, a abordagem de Álgebra Linear continua como sempre foi, e nada muda, levando a uma triste certeza, a da mesmice no quadro como um todo: pouca aprendizagem, alta reprovação e evasão. Esta afirmação é resultado dos anos de trabalho da autora em diferentes ambientes universitários usando diferentes recursos didáticos no ensino de Álgebra Linear. É evidente que há esforços (e são muitos, com certeza!) no sentido de modificar este quadro em aspectos como os citados acima. Mas estes esforços ainda não são maioria apesar dos esforços dos últimos 40 anos na busca de sentidos de reformular a prática de seu ensino (Dorier, 2002, Konyalioğlu et al, 2003). Por outro lado, ao longo do tempo, a necessidade dos conceitos de Álgebra Linear continua essencial. E, citando uma obra da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura - UNESCO, "Superar os desafios mencionados... supõe uma evolução nas práticas de ensino que permitam que seu papel seja coerente com os objetivos fixados." Embora esta verdade tenha sido formulada pensando na educação básica, cabe adequadamente para muitas disciplinas de graduação cujos "objetivos fixados" incluem decididamente a compreensão da relevância e da necessidade de aprendizagem de Álgebra Linear em Aplicações de um largo espectro ligados não só à Matemática mas a outras Ciências – e o mundo real! Aqui e no texto como um todo, esta expressão é usada no sentido como aquele apresentado por Galina (2016), como *real world maths problem*. É evidente que problemas de Matemática Abstrata e Aplicada também são reais, mas aqui a referência é a problemas encontrados nos cotidianos de alunos, docentes, comunidades e às áreas de formação profissional de cursos de Matemática e de serviços. Como conseguir mudar este quadro em que parecemos fazer do mesmo jeito as mesmas coisas que eram feitas e como o eram há décadas, muitas décadas? Em alguns livros-texto a Álgebra Linear é abordada junto com o Cálculo e tanto esta quanto aquele são considerados pelos estudantes como excessivamente teóricas e abstratas. Como seus professores, temos sido pouco capazes de convencê-los da extrema importância dos conceitos e métodos da Álgebra Linear tanto por motivos práticos quanto por exigências teóricas (Chiari, 2015). Aliás, Dorier *et al* (2000) afirmam formal e categoricamente que na França as dificuldades dos estudantes com conceitos iniciais como espaços vetoriais ou subespaços são um sério impedimento na aprendizagem de outros aspectos de Álgebra Linear. E Celestino (2000) estudou as reprovações em Álgebra Linear e classificou esta disciplina como uma das "disciplinas-problema" para alunos de graduação apesar de sua posição como "elo" para tantos outros temas e disciplinas em Matemática, uma opinião expressa por Grande (2006). Práticas que nos levaram a uma provocante descrição da Matemática ensinada nas escolas como no texto de D'Ambrósio (1999).

Além disto, como outras disciplinas de Matemática em cursos de graduação, a Álgebra Linear é de importância maior, especialmente no exercício profissional futuro. E não só no que se costuma chamar de Ciências Exatas, Tecnologia e Informática, mas também, e cada vez mais, em tantos outros campos de atuação social. Todo o arcabouço de Álgebra Linear, com seus instrumentos teóricos e conceituais bem como com seus métodos e instrumentos, é uma base para a criação de instrumentos de Matemática – e de Matemática Aplicada! A par disto, Chiari (2015) coloca a Álgebra Linear como um precioso acesso a um novo e fascinante campo de conceitos matemáticos como um modo de produzir uma linguagem matemática unificada e, também, como o jeito de apresentar aos estudantes um tipo de raciocínio matemático com o qual o aluno no início de graduação ainda não se familiarizou.

Dikovic (2007), em seu trabalho sobre aprendizagem e ensino de Álgebra Linear com Tecnologias, afirma que (numa tradução livre da autora), a possibilidade de se resolver rapidamente e de forma eficaz um grande número de exemplos certamente contribui para um melhor entendimento, o que contraria a opinião de alguns professores que temem que o uso de computadores ou calculadoras em Matemática possam transformar os alunos em "apertadores de botão" e que, por exemplo, multiplicações de matrizes feitas “na mão” apenas oferecem a compreensão dos resultados finais. Outra referência de uma abordagem neste sentido, é o trabalho editado por Borba e Javaroni, do estudo de Ferreira, Jacobini, Campos e Wodewotzki (2013).

A tecnologia pode fornecer um ambiente para exploração ativa de estruturas matemáticas por meio de várias representações. Esta também serve para mostrar aos alunos alguns aspectos da matemática que não são possíveis com papel e caneta. Além disso softwares podem ser usados para reforçar os conceitos e motivar o aprendizado da teoria. Por exemplo, na resolução de um sistema linear os alunos poderão se concentrar em ideias -como verificar se as soluções obtidas fazem sentido no problema prático envolvido - em vez de dispender seu tempo com cálculos. O uso de um software pode estimular a intuição geométrica por meio de interessantes visualizações quando o sistema linear é de ordem dois ou três e, por outro lado, possibilitará obter a solução de sistemas lineares de ordem grande (que representam a maioria dos problemas reais!).

Neste trabalho, serão evidenciados alguns exemplos baseados em aplicações modeladas no cotidiano que podem ser abordados junto com os principais aspectos teóricos de Álgebra Linear, como promotores de uma aprendizagem motivadora. Meu objetivo aqui, porém, não é o de defender uma abordagem puramente prática de Álgebra Linear – algo difícil de saber ou imaginar o que seria! – mas de insistir na possibilidade ou necessidade de apresentar os conceitos teóricos mais relevantes e fundamentais da disciplina de Álgebra Linear através através de problemas aplicados. Dorier (2000) afirma que, por um lado, estudantes de Álgebra Linear dão testemunho do que chamam de um “enorme obstáculo” (nas palavras do próprio autor!) na aprendizagem de Álgebra Linear: seu formalismo – e não num sentido genérico mas com relação específica a essa disciplina e, por outro lado, algo frequente em situações de ensino: professores não têm sido capazes de exibir ou mesmo explorar problemas matemáticos de todos os tipos nos quais a Álgebra Linear surge implicitamente, como uma ferramenta de trabalho..

No parágrafo das Conclusões será submetida uma prática de que poderá ajudar estudantes a entenderem:

(1) O que é tratado em uma primeira disciplina de Álgebra Linear;

(2) Como os conceitos teóricos vistos da disciplina podem e devem ser usados em situações úteis e significativas;

(3) A importância de compreender o papel e a função de Álgebra Linear em aplicações e

(4) A importância de entender conceitos e ferramentas de Álgebra Linear.

E, como consequência,

(5) Compreender como a Tecnologia nos capacita ao trabalho efetivo em situações da vida real.

Os exemplos aqui apresentados, portanto (que são apenas ilustrativos de possibilidades e, como tal, não cobrem toda ementa de uma disciplina de Álgebra Linear) têm como objetivo apresentar uma alternativa à introdução de cada novo tópico, de modo a mostrar sua necessidade para um futuro exercício profissional. Sendo assim, cada conceito apresentado tem a sua aprendizagem, sua análise, sua compreensão e sua memorização.

Estes exemplos não seguem uma ementa usual de Álgebra Linear como mostram a experiência da autora e os textos de Álgebra Linear mais usados. Em vez disso, seguem uma sequência natural nas abordagens de conceitos úteis e necessários de Álgebra Linear e não se restringem a exemplos – como é habitual, infelizmente! - que possam ser resolvidos manualmente, com caneta e papel e, muitas vezes com calculadoras. Ao contrário, apoiam-se sistematicamente no uso de tecnologias: instrumental numérico presente em *softwares* adequadamente escolhidos com os quais problemas mais realistas passam a fazer mais sentido embora obtendo, na verdade, aproximações das procuradas soluções. Soluções estas que devem prestar-se a provocar os alunos a avaliarem criticamente os resultados obtidos e a interpretarem tais resultados à luz do problema originalmente proposto. E, também, do ponto de vista de Educação Matemática, a simularem futuros processos de tomada de decisão…

Este trabalho, portanto, está em concordância com Revuz (citado por Dorier, *op. cit.*) em sua negação frontal àquilo que afirmou Plancherel (um matemático suiço que viveu de 1885 a 1967) como uma provocação numa conferência em 1960, de que estudantes que não conseguem vencer as dificuldades em aprender Álgebra Linear pura e formal são matematicamente incapazes… A maioria dos exemplos apresentados a seguir não são de minha exclusive criação, mas incluem a adaptação de ideias e trabalhos de outros matemáticos, ou seja, de modo geral, não são novos. São exemplos que visam mostrar como aspectos de Álgebra Linear formal e teórica podem aparecer em um contexto de aprendizagem em que seus conceitos fundamentais e seu uso podem motivar a compreensão de sua importância no aprender e saber Matemática.

2 Exemplos e Conceitos Envolvidos

Exemplo 1: Combinação de barras de cereais ou muesli para atletas

Durante uma visita a um nutricionista, um atleta da Austrália (referência à Austrália é devido aos dados da vida real obtidos em https://www.choice.com.au/food-and-drink/bread-cereal-and-grains/cereal-and-muesli/articles/muesli-and-cereal-snack-bar-review) recebe a recomendação de que ele deveria comer 21 barras de cereais ou muesli por semana ou três todos os dias, como uma fonte suplementar. O objetivo desta indicação foi baseada no fato de que ele deveria ingerir uma quantidade semanal de respectivamente, 11715 kJ de energia, 134.6 gramas de grãos, 199.10 gramas de proteína, 47 gramas de gordura saturada, 417.40 gramas de glicose, 360 gramas de fibras comestíveis e 0.3876 gramas de sódio. Em um estabelecimento comercial apropriado, este atleta encontrou oito tipos de barras de cereais contendo os itens nutricionais recomendados, nas quantidades dadas na tabela que segue:

Barra Cereal/Muesli	A	B	C	D	E	F	G	H
Preço ($)	2.99	2.99	1.12	0.65	1.75	1.1	2.75	0.95
Energia (kJ)	550	574	596	524	564	570	494	799
Grãos (g)	0	0	0	16,1	6	15	0	21.2
Proteínas (g/100g)	10.3	9.9	13.6	7.9	5.8	11	9.1	9.9
Gorduras saturadas(g/100g)	1.1	0.6	3	2.9	0.9	1.9	2.7	2.3
Glicose (g/100g)	21.4	21.3	27	18.9	25.3	13.3	12	13.6
Fibras (g/100g)	16.3	15.7	11	20.5	8.5	9.2	30.8	7.3
Sódio (mg/100g)	43	7	3.4	32	15	21	11	11

Supondo que ele tenha 35.00 dólares para esta compra, como combinar as oito marcas diferentes de barras de cereais?

A resposta a esta pergunta pode ser obtida pela resolução do sistema linear AX = b onde A é a matriz oito por oito

$$\begin{bmatrix} 2.99 & 2.99 & 1.12 & 0.65 & 1.75 & 1.1 & 2.75 & 0.95 \\ 550 & 574 & 596 & 524 & 564 & 570 & 494 & 799 \\ 0 & 0 & 0 & 16,1 & 6 & 15 & 0 & 21.2 \\ 10.3 & 9.9 & 13.6 & 7.9 & 5.8 & 11 & 9.1 & 9.9 \\ 1.1 & 0.6 & 3 & 2.9 & 0.9 & 1.9 & 2.7 & 13.6 \\ 21.4 & 21.3 & 27 & 18.9 & 25.3 & 13.3 & 12 & 7.3 \\ 16.3 & 15.7 & 11 & 20.5 & 8.5 & 9.2 & 30.8 & 13.6 \\ 0.043 & 0.007 & 0.034 & 0.032 & 0.015 & 0.021 & 0.011 & 0.011 \end{bmatrix}$$

X é uma matriz 8x1, cujos elementos representam as quantidades das barras de cereais encontradas pelo atleta e b é o vetor com o preço total e os conteúdos totais

$$[35 \quad 11715 \quad 134.6 \quad 199.10 \quad 47 \quad 417.40 \quad 360 \quad 0.3876\,]^t.$$

É possível resolver o problema por método manual através do escalonamento. Entretanto, fica trabalhoso. Este problema enfatiza a necessidade da tecnologia para sua resolução já que resolvê-lo através de métodos manuais é trabalhoso e pode se tornar desinteressante. Nesse caso, a solução foi obtida usando o software livre Octave (https://www.gnu.org/software/octave/) e é $[2 \quad 1 \quad 4 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 1\,]^t$.

A variação nos dados iniciais (como usar diferentes barras e necessidades atléticas, bem como preços) pode permitir que os professores trabalhem com uma maior gama de possíveis problemas - e sua solução! E pode até levar à sala de aula uma situação da vida real, com atletas de diferentes esportes.

Exemplo 2: A colocação de um centro de manutenção cooperativa rural

Neste exemplo, considera-se uma situação brasileira, a produção agrícola local por áreas menores mantidas pelas famílias - e que formam cooperativas para produzir e comercializar seus produtos, bem como manter seus equipamentos.

Algumas dessas cooperativas são organizações mais antigas, mas muitas estão surgindo nos últimos anos. Além disso, a manutenção de máquinas agrícolas (em geral máquinas pequenas) deve ser colocada em alguma parte do conjunto de propriedades, de acordo com alguns critérios. Consideremos um mapa no qual cada propriedade é identificada por uma letra (A a H) e uma matriz cujos elementos representam as distâncias dadas em quilômetros entre os diferentes locais de propriedades. Essas distâncias são nulas entre uma mesma propriedade de modo que a diagonal principal é nula.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 & 12 & 9 & 11 & 13 & 16 \\ 6 & 0 & 13 & 8 & 13 & 11 & 14 & 10 \\ 5 & 13 & 0 & 7 & 4 & 6 & 8 & 9 \\ 12 & 8 & 7 & 0 & 5 & 3 & 6 & 2 \\ 9 & 13 & 4 & 5 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ 11 & 11 & 6 & 3 & 2 & 0 & 6 & 5 \\ 13 & 14 & 8 & 6 & 4 & 6 & 0 & 4 \\ 16 & 10 & 9 & 2 & 7 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Um critério possível é o de considerar a distância máxima coberta por cada máquina para alcançar o centro de manutenção (máximo de cada linha ou coluna) e considerar como a localização desta instalação a propriedade para a qual temos a menor distância máxima (mínimo entre máximos das linhas ou colunas). Neste caso o centro de manutenção deve ser instalado na propriedade F e o máximo que será preciso transportar uma máquina para manutenção periódica será de 11 km.

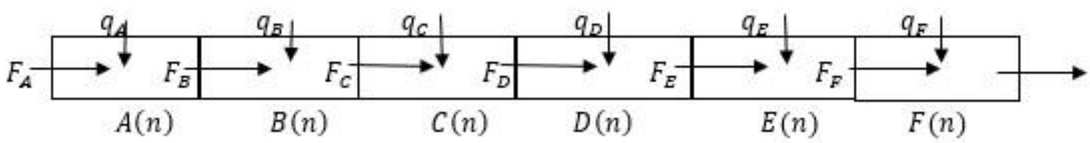
Mas considerando, além da distância, o número de máquinas a serem transportadas, a solução pode mudar. Se o número de tratores em cada propriedade for, respectivamente, 13, 8, 9, 7, 4, 2, 5 e 6, fazendo a multiplicação da matriz das distâncias pelo vetor $[13\ \ 8\ \ 9\ \ 7\ \ 4\ \ 2\ 5\ 6]^t$ a solução ideal virá a ser escolher como centro de manutenção a propriedade C, pois o menor valor dentre os elementos da matriz resultante $[396\ \ 455\ \ 340\ \ 351\ \ 358\ \ 774\ \ 447]^t$.

Neste exemplo podem ser introduzidos conceitos de diagonal de matriz, matriz simétrica, produto de matrizes por vetores, distâncias máximas e minímas, etc.

Exemplo 3. Poluição ao longo de um rio que serve cidades

No Brasil, uma parte substancial da água para uso municipal vem de rios. Infelizmente, esses rios também recebem produtos com impacto ambiental. A figura abaixo ilustra uma situação limitada em que cada seção do rio recebe poluição do rio, bem como de seus próprios bancos e uma estratégia deve ser sempre encontrada para descartar o material impactante.

Consideramos uma mistura homogênea do material impactante em cada parte (ou compartimento) do rio, bem como o volume e o fluxo dessas partes. Além disso, a degradação do material poluente e o aumento deste material em cada setor.



A situação a considerar é dada por uma sucessão de retângulos que representam seções deste rio (seus compartimentos) e as sucessivas quantidades de conteúdo de poluição na semana "n" em cada setor é dada, sucessivamente, por $A(n),\ B(n), C(n), D(n),\ E(n)\ e\ F(n)$.

Neste caso, F_A, F_B, F_C, F_D, F_E, F_F representam o fluxo em cada setor enquanto V_A, V_B, V_C, V_D, V_E, V_F representam os volumes; Além disso, d_A, d_B, d_C, d_D, d_E, d_F dão a degradação do material impactante em cada um dos setores. De forma análoga, a quantidade de material poluente liberada em cada setor é dada, respectivamente por q_A, q_B, q_C, q_D, q_E, q_F. A degradação e as quantidades injetadas são fornecidas em valores semanais.

A evolução desta situação é, portanto, dada pelo seguinte sistema:

$$A(n+1) = \left(1 - \frac{F_A}{V_A} - d_A\right) A(n) + q_A,$$

$$B(n+1) = \frac{F_A}{V_A} A(n) + \left(1 - \frac{F_B}{V_B} - d_B\right) B(n) + q_B,$$

$$C(n+1) = \frac{F_B}{V_B} B(n) + \left(1 - \frac{F_C}{V_C} - d_C\right) C(n) + q_C,$$

$$D(n+1) = \frac{F_C}{V_C} C(n) + \left(1 - \frac{F_D}{V_D} - d_D\right) D(n) + q_D,$$

$$E(n+1) = \frac{F_D}{V_D} D(n) + \left(1 - \frac{F_E}{V_E} - d_E\right) E(n) + q_E, \text{ e}$$

$$F(n+1) = \frac{F_E}{V_E} E(n) + \left(1 - \frac{F_F}{V_F} - d_F\right) F(n) + q_F.$$

Sendo

$$M = \begin{bmatrix} 1 - F_A/V_A - d_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_A/V_A & 1 - F_B/V_B - d_B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_B/V_B & 1 - F_C/V_C - d_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_C/V_C & 1 - F_D/V_D - d_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_D/V_D & 1 - F_E/V_E - d_E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_E/V_E & 1 - F_F/V_F - d_F \end{bmatrix}$$

$\mathrm{P(n)} = \begin{bmatrix} \mathrm{A(n)} \\ \mathrm{B(n)} \\ \mathrm{C(n)} \\ \mathrm{D(n)} \\ \mathrm{E(n)} \\ \mathrm{F(n)} \end{bmatrix}$ e $\mathrm{q} = \begin{bmatrix} \mathrm{q_A} \\ \mathrm{q_B} \\ \mathrm{q_C} \\ \mathrm{q_D} \\ \mathrm{q_E} \\ \mathrm{q_F} \end{bmatrix}$ temos, na forma matricial, o sistema:

$$\mathrm{P(n+1) = M.P(n) + q.}$$

Se procurarmos uma situação em que a poluição permaneça constante igual a $\bar{P}$, teremos que resolver:

$\mathrm{\bar{P} = M.\bar{P} + q \Leftrightarrow (I - M).\bar{P} = q,}$

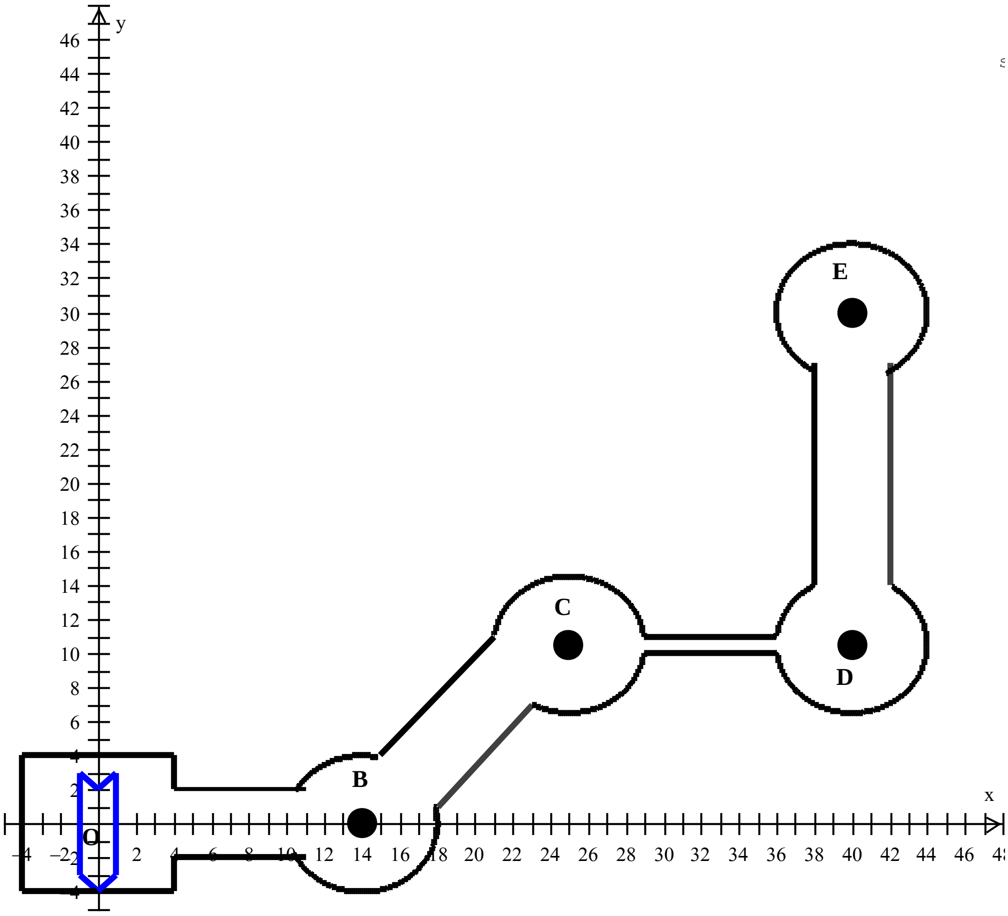
e uma solução existe se e somente se $det\,(I-M) \neq 0$ isto é, se

$det(I-M) = \left(\frac{F_A}{V_A} + d_A\right).\left(\frac{F_B}{V_B} + d_B\right).\left(\frac{F_C}{V_C} + d_C\right)\ldots.\left(\frac{F_F}{V_F} + d_F\right) \neq 0.$

Neste exemplo, é preciso mencionar matrizes esparsas, matrizes triangulares inferiores, diagonais principais e secundárias, bem como determinantes e existência de soluções.

Exemplo 4: Transformações Lineares

Fixadas as bases canônicas dos espaços Euclidianos envolvidos e conhecidas as matrizes que representam transformações lineares (dilatações, contações, projeções, cisalhamento e rotações) e a aplicação de translação, propomos que sejam determinadas as transformações (matrizes) necessárias para fazer com que o "monstro" com centro na origem do sistema cartesiano se desloque, dentro dos limites do caminho imposto, "devorando" as bolas B, C, D e E (figura abaixo). Ele terá devorado cada uma das bolas quando seu ponto central, que no início era a origem do plano cartesiano, estiver localizado no ponto que representa a respectiva bola. Propõe-se também que em cada uma das situações sejam registrados os novos vértices que determinam a localização do monstro.



Em sua posição inicial os pontos que definem o monstro são $(0,2), (1,3), (1,-3), (0,-4), (-1,-3), (-1,3)$. Como o mesmo está centralizado na origem do plano cartesiano, as coordenadas dos vetores com ponto inicial em $(0,0)$ e extremidades nestes pontos coincidem com as coordenadas destes pontos. Desta forma a matriz que denominaremos por M_0, cujas colunas são constituídas pelas coordenadas destes pontos determinará a posição inicial do monstro.

Observando a figura vemos que o primeiro movimento a ser feito é o de uma rotação de 90^o no sentido horário ou, equivalentemente, de 270^o no sentido anti-horário. Após isso o monstro deverá se deslocar na horizontal até ter seu centro em $B = (14,0)$. Tal deslocamento será obtido através da de uma aplicação de translação:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & -4 & -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim as coordenadas dos vértices que definem o monstro centralizado no ponto B são dados pelas colunas da matriz $M_B = \begin{bmatrix} 16 & 17 & 11 & 10 & 11 & 17 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Para que o monstro vá na direção da bola C, será suficiente aplicar uma rotação de 45^o no sentido anti-horário, em torno do novo centro B, seguida de uma translação.

$$\begin{bmatrix} 0.71 & -0.71 \\ 0.71 & 0.71 \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} 16 & 17 & 11 & 10 & 11 & 17 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 \\ 10.5 & 10.5 & 10.5 & 10.5 & 10.5 & 10.5 \end{bmatrix}$$

Assim as coordenadas dos vértices que definem o monstro em sua nova posição, com centro em $C = (25{,}10.5)$, são dadas pelas colunas da matriz

$$M_C = \begin{bmatrix} 26.42 & 27.84 & 23.58 & 22.16 & 22.16 & 26.42 \\ 11.92 & 11.92 & 7.66 & 7.66 & 9.08 & 13.34 \end{bmatrix}.$$

Para o próximo movimento após uma nova rotação de 45^o no sentido anti-horário (de 315^o no sentido horário), em torno do centro C, será necessária uma contração de fator 0.5 no sentido vertical , que "emagreça o monstro" e ele consiga se deslocar no interior do caminho, através de mais uma translação, até o ponto D:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.71 & 0.71 \\ -0.71 & 0.71 \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} 26.42 & 27.84 & 23.58 & 22.16 & 22.16 & 26.42 \\ 11.92 & 11.92 & 7.66 & 7.66 & 9.08 & 13.34 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 & 25 & 25 & 25 & 25 & 25 \\ 10.5 & 10.5 & 10.5 & 10.5 & 10.5 & 10.5 \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 10.5 & 10.5 & 10.5 & 10.5 & 10.5 & 10.5 \end{bmatrix}$$

$$M_D = \begin{bmatrix} 42.02 & 43.02 & 36.98 & 35.97 & 36.97 & 42.02 \\ 10.5 & 10 & 10 & 10.5 & 11 & 11 \end{bmatrix}.$$

Para o último movimento o monstro poderá voltar as suas medidas iniciais, o que será feito através de uma dilatação de fator 2 no sentido vertical. Após isso uma nova rotação, agora de 90^o no sentido anti-horário, em torno do centro D, e um deslocamento final através de mais uma translação:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} 42.02 & 43.02 & 36.98 & 35.97 & 36.97 & 42.02 \\ 10.5 & 10 & 10 & 10.5 & 11 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 10.5 & 10.5 & 10.5 & 10.5 & 10.5 & 10.5 \end{bmatrix}\right] + \begin{bmatrix} 40 & 40 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \end{bmatrix}$$

$$M_E = \begin{bmatrix} 40 & 41 & 41 & 40 & 39 & 39 \\ 32 & 33 & 27 & 26 & 27 & 33 \end{bmatrix}$$

Neste exemplo estão envolvidos operadores lineares em R^2, multiplicações de matrizes e, inclusive, a noção de que os operadores são aplicados sobre vetores definidos pelas coordenadas de representantes com origem na origem do sistema cartesiano.

Como complemento pode-se sugerir que os estudantes criem um jogo (preferencialmente tridimensional) onde necessitem que um objeto, pessoa, animal, etc., representado por no mínimo vinte vértices, precise fazer determinados movimentos e que esses movimentos sejam representados por transformações lineares e translações. Aqui o estudante verificará a necessidade do uso de algum software para fazer as operações, o que na prática é quase sempre inevitável.

3 Considerações Finais

Revuz faz duas afirmações acerca da aprendizagem de Álgebra Linear. Pode ser que sejam vistas como dificuldades ou até obstáculos! Seguem abaixo com os comentários da autora:

- A Álgebra Linear tem uma vasta gama de aplicações tanto teóricas quanto práticas – não só na aprendizagem de Matemática usando instrumentos teóricos quanto para um exercício profissional que irá precisar saber como usar o ferramental de Álgebra Linear em situações da vida real, e
- A Matemática (incluindo, portanto, a Álgebra Linear) não "pertence" de modo algum aos matemáticos, e a aprendizagem e o ensino de Matemática tem que levar em conta também o aspecto de "caixa de ferramentas" em termos de usos presentes e futuros de conceitos matemáticos!

O modo como constituímos ementas e programas de disciplinas de Matemática, porém, põe em geral a maior parte da ênfase (se não *toda* essa ênfase) em aspectos teóricos evidenciando de forma paradigmática uma didática equivocada e uma deficiência severa na formação de futuros professores de Matemática em níveis elementares, médio e na graduação (especialmente), bem como de futuros profissionais de áreas que necessitam, radicalmente (no sentido de "raiz") de Álgebra Linear (Robinet *in* Dorier, 2000 e, também, França, 2007)! De fato, França (*op.cit.*) cita os textos de Álgebra Linear mais adotados em universidades brasileiras...

Apesar das possibilidades do tipo daquelas aqui apresentadas de enriquecer a disciplina, o ensino e, sobretudo, a aprendizagem, muitos textos que trazem no título expressões como "… e Aplicações" (ou algo nessa linha) dedicam-se a Aplicações puramente teóricas!

A autora deste trabalho, em sua experiência e deveres didáticos (em vários diferentes cursos em algumas universidades), pôde muitas vezes confirmar que um problema geral no ensino de Álgebra Linear (como em outras áreas) reside numa abordagem que, primeiro, trabalha uma visão geral e teórica para apenas depois abordar alguns exemplos numéricos simplíssimos específicos e ilustrativos que dão sentido à aprendizagem. Aprendizagem que, em geral, deveria andar em outro sentido: do particular para o geral! Partir de situações-problemas e exemplos motivadores para a importância de compreender a necessidade de conceitos teóricos de Álgebra Linear – e de Matemática

Neste aspecto, a Modelagem Matemática de fenômenos naturais e sociais se constitui numa alternativa desafiadora ao ensino tradicional, apresentando situações do assim chamado mundo real como o caminho introdutório à aprendizagem de conceitos e definições teóricas e formais, que, com esses exemplos, dão sentido matemático e pragmático aos assuntos abordados. Chamo esta postura de alternativa *desafiadora* porque exige, de Instituições, de Coordenações de Cursos e, sobretudo, dos próprios professores, inverter o sentido usual e tradicional de se apresentar e ensinar a Álgebra Linear, obrigando a cuidadosas pesquisas e a criação de novas abordagens conceituais e a aprendizagem desses problemas, além de um constante aprender a usar novas tecnologias.

Finalmente, meu principal objetivo com esta apresentação foi, em primeiro lugar, o de apresentar apenas algumas das inúmeras situações do mundo real cuja modelagem, crítica, resolução e validação podem tornar a Álgebra Linear uma disciplina que, além de seu conteúdo do teórico essencial, tem aplicações imediatas e necessárias, e exige, na prática do dia-a-dia, recursos tecnológicos e de *softwares* adequados e, na formação profissional, faz diferença, por sua relevância e seus significados e, em segundo lugar, por indicar uma direção de pesquisa necessária e desafiadora em Educação Matemática.

4 Referências

CELESTINO, M. R. *Ensino-aprendizagem da álgebra linear:* as pesquisas brasileiras na década de 90. 2000. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

CHIARI, A. S. S. *O papel das tecnologias digitais em disciplinas de álgebra linear à distância:* possibilidades, limites e desafios. 206 f. 2015 Dissertação (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

D’AMBROSIO, U. *Entrevista com Ubiratan D’Ambrosio, Revista de Educação Matemática em Revista.* Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Vol. 6, nº 7, pp 5-10, 1999.

DIKOVIC, Ljubica. *Interactive learning and teaching of linear algebra by web technologies* Some Examples. The Theaching of Mathematics, Vol. X, 2, pp. 109–116, 2007.

DORIER, J L. (Org.). *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

DORIER, J. L.; ROBERT, A.; ROBINET, J.; ROGALSKI, M. The obstacle of formalism in linear algebra. In: DORIER, J. L. (Org.). *On the teaching of linear Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p 85-124, 2000.

DORIER, J. L. *Thinking about the teaching of linear algebra*. The Culms Newsletter – Community for Undergraduate Learning in the Mathematical Sciences, ICM Vol. III, 1–3, p 875-884, 2002.

FERREIRA, DENISE A. L; JACOBINI, OTÁVIO R. Recursos tecnológicos e modelagem matemática*:* três experiências na sala de aula. In BORBA M. C. e JAVARONI, S. L., *REMATEC (RN),* Ano 8/nº 14/Set-Dez, 2013.

FRANÇA, M. V. D. *Conceitos fundamentais de álgebra linear: uma abordagem integrando geometria dinâmica*. 2007. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

GRANDE, A. L. *O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de álgebra linear*. 2006. 208 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

GALINA, Larina. *Analysis of real-world math problems:* theoretical model and classroom application. Voprosy Obrazovaniya/ Educatonal Studies. Moscow, No. 3. P. 151–168, 2016.

KONYALIOğLU, A. Cihan; İPEK, A. Sabri; ISIK, Ahmet. *On the teaching linear algebra at the university level:* the role of visualization in the teaching vector spaces*.* Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education Vol. 7, No. 1, p 59–67, March 2003.

REVUZ A. Prefácio. In: DORIER, J. L. (Org.). *On the teaching of linear algebra.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p XV-XVIII, 2000.