VIII Jornada Nacional de EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
XXI Jornada Regional de EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Educação Matemática: identidade em tempos de mudança
06 a 08 de maio de 2020
UPF

O USO DE CONTEXTOS PARA A CONTEXTUALIZAÇÃO DA MATEMÁTICA

Ana Queli Mafalda Reis Lautério
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Frederico Westphalen
ana.reis@iffarroupilha.edu.br

Eixo Temático: Pesquisa em Educação Matemática

Modalidade: Comunicação Científica

Resumo
A contextualização é um princípio educativo, conforme Lautério (2017) que objetiva desenvolver o pensamento teórico nos estudantes. Neste artigo, buscamos analisar o movimento da contextualização em sala de aula a partir de um recorte de um experimento didático formativo, que problematizou diferentes contextos para a aprendizagem do conceito de função. O estudo se apoia da Teoria Histórico Cultural de Vigotsky (2008) e na teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov (2009). Os episódios evidenciam que o uso de contextos possibilitam explorar sentidos dos alunos para a apropriação dos significados do conceito, no entanto, fortalecem o entendimento de que a contextualização é um movimento desencadeado pelos contextos, mas que devem ser orientados intencionalmente pelo professor em busca das abstrações e generalizações. A aprendizagem da matemática de forma contextualizada, se observa pelos episódios que caracterizam o desenvolvimento do pensamento em um plano teórico.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Ensino Desenvolvimental. Função. Abstração. Generalização.

1 Introdução

Analisando o cenário envolto no termo *contextualização*, reconheço certa dicotomia entre as esferas da educação e as mudanças analisadas nas práticas dos professores (REIS, 2017). Estas limitam-se à exposição de exemplos para ilustrar utilidades da matemática e ao desenvolvimento de listas de aplicações. Como consequência, há um discurso sobre as dificuldades de interpretação dos alunos, que, mesmo acompanhando exemplos que exigem o mesmo procedimento, não conseguem compreender outras aplicações. Desse modo, a contextualização ocorre de forma simplista e com base no senso comum.

Nessa perspectiva, propus como elemento de "alinhamento" da coerência para uma articulação entre as esferas da educação um estudo sobre a práxis da contextualização. O desenvolvimento do estudo partiu da necessidade de compreender a práxis da contextualização no processo de ensino da matemática, a partir de elementos que potencializem o processo de aprendizagem conceitual. Defendo assim, a necessidade de agregar significado ao termo contextualização, pois atualmente tem sido usado como “frase chavão” na busca por melhorias no ensino e aprendizagem da matemática.

O recorte a ser discutido neste artigo, tem por objetivo descrever como a exploração de um contexto em sala de aula pode desenvolver o movimento de contextualização para a aprendizagem de conceitos matemáticos. Desta forma destaco a diferença com que compreendo estes dois temos em meus estudos

> Compreendo por *contexto* as circunstâncias ou fatos acerca de uma determinada realidade, seja esta realidade imediata, mediata ou pensada, podendo ser fictícia, ter um caráter interdisciplinar ou intramatemático, tais circunstâncias ou fatos seriam representação do concreto. No que se refere ao termo *contextualização*, compreendo-o e defendo-o como um princípio que reestrutura o fazer didático e pedagógico do professor a partir da problematização e exploração de “contextos” com vistas à significação conceitual. (2017, p. 99)

Tais entendimentos tem suporte na abordagem histórico-cultural de Vigotsky (2008) e pelo materialismo histórico dialético de Marx, com o objetivo de explorar a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, que aproxima as concepções histórico-culturais e dialéticas do pensamento de questões escolares.

Este artigo se apoia em recortes de um estudo empírico vivenciado por um grupo de estudantes da educação básica – ensino médio a partir da proposição de um experimento didático baseado nos experimentos formativos de Davydov (2009), realizado ainda em minha pesquisa de doutorado, considerando o conceito matemático de função.

2 Abstrações iniciais através de um contexto

A teoria do ensino desenvolvimental estrutura-se para orientar o estabelecimento da relação geral no pensamento do estudante desde o início. Nesse sentido, explorar contextos a partir da conexão essencial do conceito permite que os alunos estabeleçam sentidos para os significados conceituais, e, mediante análise e síntese, desencadeiam-se as abstrações e generalizações, logo a contextualização é um movimento intencional do professor.

O contexto 1, a seguir, tem o objetivo de explorar a essência do conceito de função e dar início ao processo de análise e dedução. Mesmo que a variação da tarefa seja uma relação particular, a relação que será priorizada é a relação geral, que une os significados de relação, dependência e variação.

Figura 1: Recorte do contexto 1 (E1, Apêndice 1, 9 ago. 2016)

Observando a sequência, estabeleça a RELAÇÃO entre o número de triângulos e a quantidade de palitos necessários para formá-los.

1ª figura **2ª figura** **3ª figura**

- Quantos palitos são necessários para formar a 4ª figura? E para formar a 11ª figura?
- Com 27 palitos, é possível formar quantos triângulos? E com 53 palitos?
- Como podemos expressar genericamente essa relação entre a quantidade de triângulos e a quantidade de palitos utilizados para formá-los?

Fonte: Lautério, 2017, p. 137.

O contexto investigativo busca orientar os alunos por meio da palavra *relação*, que é um dos significados atribuídos ao conceito de função. O sentido do contexto permite ao aluno identificar a conexão essencial do conceito e obter elementos claros que orientam as operações mentais. Nesse contexto, Vygotsky (2008) defende que o uso de signos ou palavras norteia a atividade intelectual do aluno na solução de problemas.

Para Davydov (2009, p. 75), "a tarefa geral do conhecimento consiste, como escreveu V. I. Lênin, em abarcar '... a regularidade universal da natureza em eterno desenvolvimento e movimento'". Sendo assim, orientar o pensamento dos alunos pela palavra *relação* consiste em problematizar o desenvolvimento e movimento do contexto analisado.

De acordo com o episódio 1, os diálogos do grupo na resolução do problema do contexto possibilitaram evidenciar o surgimento dos demais significados, bem como de signos, que foram sendo problematizados pela pesquisadora ao realizar aproximações e intervenções no grupo.

Episódio 1 – Explorando a essência do conceito
[diálogos em grupo]

(1) **Guilherme**: *Vai sempre aumentando de 2 em 2 em cada figura.*
(2) **Lucas**: *A quarta vai ter 9 [palitos]. É o dobro do número [triângulos] mais um. Esse um é o palito inicial.*
(3) **Guilherme**: *Então tem uma equação para resolver isso?* [O aluno Lucas continua a sequência da atividade sem falar em equação].
(4) **Lucas**: *27 - 1 que tu vais tirar o palito inicial e dividir por 2, é igual a 13.*
(5) **Guilherme**: *Então 53 - 1 dividido por 2 dá 26. Qual é a relação?*
(6) **Lucas**: *A quantidade de triângulos é a quantidade de palitos, menos um, dividido por dois.*
(7) **Guilherme**: *O total de palitos dividido por dois, subtraindo um.* [Pesquisadora se aproxima do grupo e questiona]
(8) **Pesq.**: *Por que dividir por 2?*
(9) **Lucas**: *Porque são dois palitos que são usados para formar mais um triângulo.*
(10) **Guilherme**: *Professora, como assim, generalizar a quantidade de palitos e a quantidade de triângulos?*
(11) **Pesq.**: *A ideia de generalizar é estabelecer a relação entre dois valores que eu não conheço. Como posso relacionar? Porque existe uma relação, certo?*
(12) **Guilherme**: *Sim!*
(13) **Pesq.**: *Vocês conseguiram identificar... Conforme aumenta a quantidade de triângulos, aumenta a quantidade de palitos? Como eu posso representar um valor que eu não*

conheço? O que a gente utiliza em matemática para representar valores que eu não conheço?

(14) **Guilherme**: *Uma incógnita!*

(15) **Lucas**: *x e y?*

(16) **Pesq.**: *Vamos pensar por aí...* [Pesquisadora se afasta do grupo, e os alunos tentam utilizar os signos *x* e *y* para representar a relação que já haviam verbalizado e escrito na língua materna]

(17) **Guilherme**: *x = y - 1*

(18) **Lucas**: *Não...*

(19) **Guilherme**: *x é o número de palitos.*

(20) **Lucas**: *x é o número de palitos x = y ....*

(21) **Guilherme**: *y é o número de triângulos.*

(22) **Lucas**: *y · 2 +1*

(23) **Guilherme**: *Não seria y / 2?*

(24) **Lucas**: *Não, porque y é o número de triângulos. Você vai multiplicar pelo número de triângulos para ter o número de palitos e acrescentar um, que é o primeiro palito.*

(25) **Guilherme**: *Ah é, e aqui é para saber o número de palitos, daí inverte. Depois, para saber o número de triângulos, daí é dividido por 2 - 1.* (E1, G1, 9 ago. 2016).

Fonte: Lautério, 2017, p. 138

Embora a palavra enunciada para orientar os alunos fosse *relação*, o primeiro elemento abstraído pelo grupo foi o crescimento linear referente ao significado de variação, conforme a linha (1). Quando o aluno Guilherme menciona que aumenta de dois em dois, compreendo que o aluno realiza uma “transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado” (DAVYDOV, 2009, p. 99), o que corresponde à primeira ação de estudo.

Apesar de a relação geral compreender um entendimento de variação não exclusivamente linear, a primeira tarefa particular propiciou a sua abstração inicial; como o objetivo é a relação geral, o próximo contexto certamente não pode explorar a mesma relação particular (variação linear), e é necessário que o aluno generalize a abstração de variação.

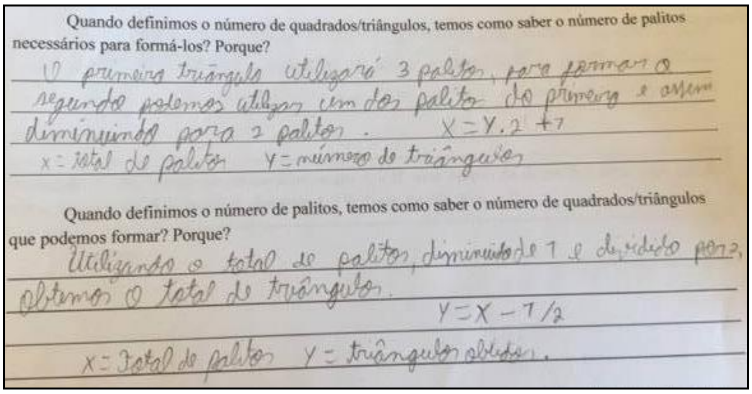
Embora os encaminhamentos iniciais fossem possíveis de ser resolvidos pelo entendimento de expressão ou equação, os alunos apresentaram argumentos que buscavam justificar a relação, evidenciando que o pensamento estava sendo orientado pela relação geral que resolve as relações particulares. O aluno Lucas conseguiu estabelecer sentidos para simbolizar as variações na quantidade de palitos e triângulos, permitindo tentativas de modelar essa relação. No entanto, ela oscila em duas direções: a primeira resulta na quantidade de palitos, e a segunda resulta na quantidade de triângulos. O aluno agiu conforme a atividade proposta, possibilitando operar com o entendimento da expressão, cujo valor resultante está sendo compreendido como uma incógnita que não possui signo.

A tentativa de modelação tem correspondência com a segunda ação de estudo de Davydov (2009, p. 99): “modelação da relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras”. Expressar, contudo, a relação por meio de signos para as quantidades de palitos e figuras foi um movimento mais complexo, que precisou ser instigado pela pesquisadora. É possível observar, também, que as ordens das operações na expressão enunciada na língua materna ainda estavam confusas e não seguiam a mesma ordem operacional para cada aluno. Isso pode ser verificado nos argumentos das linhas (6) e (7).

Os alunos Guilherme e Lucas conseguiram, em um primeiro momento, analisar uma relação geral que permitiu uma abstração substantiva de variação. É preciso lembrar, entretanto, que existem diferentes tipos de variações e, por isso, a diversidade de contextos se faz indispensável à generalização. Para solucionar o problema do contexto proposto, os alunos apoiaram-se no entendimento da expressão, mas os limites foram identificados no momento de modelar essa relação. Fui, então, chamada para auxiliar na expressão da relação genérica, e o primeiro passo foi questionar a forma como se representam os valores desconhecidos, conforme as linhas (10) a (15). O aluno Guilherme destacou a incógnita, e o aluno Lucas citou os primeiros argumentos necessários para representar dois valores desconhecidos.

O grupo passou a reescrever a relação da língua materna em forma de expressão, envolvendo os signos *x* e *y*, conforme argumentos das linhas (17) a (25). O aluno Guilherme começou enunciando uma expressão, mas Lucas não concordou. Guilherme sentiu a necessidade de identificar o que cada signo representava para que fosse possível chegar à mesma expressão. Enquanto isso, o aluno Lucas conseguiu expressar a relação na forma algébrica para encontrar o número de palitos. O aluno Guilherme, porém, questionou a expressão "multiplicar" em vez de "dividir" por dois, mas, com a observação de Lucas sobre o que representava a expressão, o aluno Guilherme concordou com o encaminhamento.

Figura 2: Recorte do registro do aluno Lucas: relação genérica (E1, G1, 9 ago. 2016)


Quando definimos o número de quadrados/triângulos, temos como saber o número de palitos necessários para formá-los? Porque?

O primeiro triângulo utilizará 3 palitos, para formar o segundo podemos utilizar um dos palitos do primeiro e assim diminuindo para 2 palitos. X = Y . 2 + 1

x = total de palitos Y = número de triângulos

Quando definimos o número de palitos, temos como saber o número de quadrados/triângulos que podemos formar? Porque?

Utilizando o total de palitos, diminuindo de 1 e dividido por 2, obtemos o total de triângulos.

Y = X − 1 / 2

x = Total de palitos Y = triângulos obtidos.

Fonte: Lautério, 2017, p. 141

Para realizar o registro da relação, os alunos conseguiram apropriar-se dos signos, como mostra a Figura 2, mas com um significado ainda restrito à incógnita. Esse registro também revela que os alunos estabeleceram a modelação em direção a cada um dos seus signos, evidenciando que o significado que ainda não estava claro era o da dependência; por isso, os alunos representavam a relação nas duas direções.

Ao final do episódio, porém, o aluno Guilherme observou que a relação que resulta na quantidade de figuras é inversa àquela que resulta na quantidade de palitos, pois, ao invés de multiplicar por dois, irá dividir e, ao invés de somar 1, irá diminuir 1. Ou seja, o significado de dependência, de certo modo, está presente de forma intuitiva na argumentação.

> [...] as transformações e vinculações isoladas da coisa podem ser examinadas como momentos de uma inter-relação mais ampla, dentro da qual ela é substituída regularmente por outra. Entretanto, esta transição conserva todo o positivo da primeira coisa, indispensável para este sistema mais amplo e integral de interações. Isto será já um exame teórico da formação mesma das coisas, de sua mediação mútua. (DAVYDOV, 2009, p. 75)

O grupo conseguiu transformar a relação em duas expressões que resultaram no valor desejado, mas a representação dos valores desconhecidos como sendo x e y ainda possuía um entendimento de incógnita, que precisava ser explorado com vistas a variáveis. Apesar de utilizarem os mesmos signos, o significado de incógnita é diferente do significado de variável e precisa ser considerado no processo de significação.

O uso de contextos é importante no movimento de recriação da conexão essencial do objeto em estudo. É necessário, contudo, estabelecer um processo de análise para chegar às abstrações, pois o conhecimento científico é a abstração resultante da realidade. Nesse sentido, a história do conceito permite ao professor compreender a conexão essencial de sua necessidade, o que é fundamental para desenvolver a abstração substantiva para o aluno em atividade de aprendizagem.

Considerando que os alunos não conseguiram desenvolver a segunda ação de estudos, que envolve a modelação de forma autônoma, propus uma discussão ao grande grupo, articulando os sentidos reconhecidos pelos alunos para as significações do conceito de função. Os significados de relação, variação e dependência vinham sendo explorados pelos alunos de forma inconsciente, e busquei redimensionar esses sentidos para apropriarem-se dos seus significados.

3 Sistematização para formalização do conceito - estabelecendo a relação geral

A sistematização contou com a participação dos alunos, que foram respondendo os questionamentos. Retomei a representação dos triângulos no quadro e fui registrando o desenvolvimento da questão de forma a evidenciar a relação da quantidade de figuras com a de palitos.

Neste recorte, não foi possível apresentar episódios de sistematização do professor pesquisador, devido ao limite de espaço, mas descrevo o movimento desenvolvido. Na sistematização questionei por que se utilizam apenas dois palitos e não três ao aumentarmos o número de triângulos. Os alunos responderam com facilidade, e de imediato apontei a existência de uma constante na relação. Aqui, é importante destacar que as abstrações dos alunos ainda não evidenciavam uma relação geral, pois suas observações correspondiam à análise externa do experimento sensorial. A relação geral fundamenta-se na análise de relações internas, o que vai além de identificar a regularidade. No entanto,

> [...] é correto partir da contemplação do objeto; só então se pode avançar no exame de seus traços peculiares, sem perder-se nos aspectos particulares, na diversidade dos detalhes dispersos. Mas, apesar da extraordinária importância da contemplação, que estabelece a substância do objeto, o verdadeiro conhecimento não pode deter-se nela. Hegel escreveu: "Na contemplação, é verdade, tenho diante de mim todo objeto em sua totalidade, mas só no conhecimento desenvolvido omnilateralmente que retorna à forma da contemplação pura, o objeto está diante de meu espírito como determinado conjunto sistemático, integral, desmembrado dentro de si mesmo" (DAVYDOV, 2009, p. 81)

A quantidade de vezes que são somados dois palitos precisa ser representada por uma variável. Ao questionar sobre essa questão, o aluno Lucas apontou que a quantidade de dois está relacionada com a quantidade de triângulos que serão construídos.

Até o momento, o registro no quadro era numérico, e a relação estava sendo expressa na língua materna. Comecei, então, a nomear os valores desconhecidos e a questionar a forma como ficaria a expressão da relação. O aluno Lucas respondeu corretamente, mas sem identificar a variável resultante. Meu questionamento teve o intuito de fazer o aluno compreender que o resultado da expressão também tem uma variável, que precisa ser expressa na relação.

Passei a retomar a sequência da atividade, agora utilizando a relação geral apresentada para resolver as alternativas. A relação estabelecida no grupo resultou na quantidade de palitos, ou seja, $y = 1 + 2x$. Em seu argumento, Guilherme apresenta a necessidade de inverter os termos para conseguir encontrar a relação que resultaria na quantidade de figuras, sendo $x = \frac{y-1}{2}$. Explorar os sentidos da representação dos signos *x* e *y* de incógnita para variável tem um custo cognitivo, visto que as situações evidenciarão aos alunos sentidos na identificação dos seus significados.

A sistematização buscou reunir as observações dos grupos e finalizar a atividade, possibilitando explorar o limite do entendimento de equação. Os signos *x* e *y* agora não são incógnitas, mas variáveis, não lhes sendo atribuídos valores únicos, o que exige um grau de generalidade maior para os signos e para o próprio conceito. A formalização do conceito consistiu em explorar a linguagem matemática com maior propriedade, definindo elementos para a análise abstrata. Dessa forma, encaminhei a formalização do conceito, discutindo as definições de função, domínio e imagem.

Novamente não apresento os episódios, agora sobre a formalização do conceito, para melhor aproveitamento do espaço, mas descrevo os questionamentos que ocorreram. O primeiro questionamento na busca pela formalização do conceito já utilizou o termo *função*. O contexto em que a palavra *função* foi inserida facilitou o seu entendimento, mesmo que o termo ainda não tivesse sido explorado.

Para explorar a definição do conceito de função, encaminhei alguns questionamentos referentes ao contexto anterior. Na sequência, registrei no quadro dois conjuntos numéricos, que representam as possibilidades de número de palitos e número de triângulos. Esse movimento buscou representar as relações entre as variáveis por meio de um registro matemático, explorando a linguagem apresentada na definição de função.

Na definição de domínio e imagem, articulei os conjuntos apresentados na definição do conceito de função e coloquei o conjunto de possibilidades de figura como uma variável independente, o que me permitiu obter quantidades de figuras correspondentes ao conjunto dos inteiros positivos, formando o domínio. Da mesma forma, o conjunto que representa a quantidade de palitos não representou todo o conjunto dos inteiros positivos, pois ele possui restrições decorrentes da variação. No exemplo citado, a imagem é um conjunto dos inteiros ímpares maiores que 1

Durante a formalização do conceito, busquei constantemente articular as definições com as abstrações iniciais que fazem sentido no contexto, uma vez que a especificidade da abstração inicial representa a "conexão simples que está na base do concreto, este "começo não desenvolvido do todo desenvolvido,... a fonte da qual se origina, se desenvolve todo o restante"" (DAVYDOV, 2009, p. 82).

> Por que tal relação se chama abstração se ela é, na verdade, completamente real e observável (pode ser completamente analisada)? Responder esta pergunta corresponde a examinar o conceito do abstrato, tal como se emprega na lógica dialética. [...] O conceito do abstrato tem várias características: o abstrato é simples, privado de diferenças, não desenvolvido. Estas características designam os aspectos do abstrato real com certa parte autônoma, apartada do todo. Esta parte pode ser, pelo já visto, só o relativamente simples, homogêneo, carente de diferenças qualitativas, não desenvolvido internamente.
>
> O abstrato e o concreto são momentos do desmembramento do próprio objeto, da realidade mesma, refletida na consciência e por isso são derivados do processo da atividade mental. A confirmação da objetividade de ambos os momentos é a peculiaridade mais importante da dialética como lógica. V. I. Lênin ressaltou: "A natureza é, *ao mesmo tempo*, concreta e abstrata...". O abstrato aparece apenas como momento da realidade material em permanente mudança.

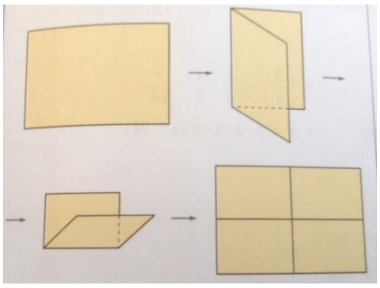
Logo, a abstração representa uma parte isolada do concreto, sendo completamente real e observável. No entanto, só a partir da generalização das abstrações teremos a apropriação da relação geral, que permitirá compreender os diferentes contextos que são dotados de relações particulares.

4 A generalização das abstrações em um novo contexto

Integrar as definições matemáticas a um novo contexto visa a desencadear a generalização das abstrações substantivas por meio da linguagem matemática. Para concluir a tarefa de estudo, propus um novo contexto, com a intenção de colocar o aluno diante da necessidade de desenvolver e avançar nas ações de estudo com maior autonomia.

Figura 3: Recorte do contexto 2 (E1, Apêndice 1, 9 ago. 2016)

Vamos fazer uma experiência com dobraduras: dobre uma folha retangular pela metade, paralelamente à sua largura, e, em seguida, abra-a e anote o número de retângulos que aparecem marcados; continue dobrando sucessivamente o retângulo encontrado, sempre pela metade e no mesmo sentido. E a cada etapa abra totalmente a folha e anote a quantidade de retângulos menores que aparecem marcados nela. O esquema abaixo dá uma ideia do processo.



- *Quais são as grandezas variáveis envolvidas?*
- *Quem é a variável independente?*
- *Quem é a variável dependente?*
- *Como podemos expressar a função?*
- *Como podemos expressar o domínio e a imagem?*

Fonte: Lautério, 2017, p. 150

A proposição desse contexto teve intenção de generalizar as abstrações substantivas. A sua resolução, portanto, permitirá evidenciar a relação geral do conceito a partir da conexão essencial de correspondência. O contexto apresentado na Figura 7 explora uma função exponencial. Para que os alunos testassem suas conjecturas, receberam uma folha de papel.

Episódio 2 –Generalização das abstrações substantivas
[diálogos em grupo]

(1) **Lucas***: Como assim? Primeiro vai ter dois, depois vai ter quatro. Acho que eu entendi a lógica, depois vai ter...* [faz a dobradura] *8. Se eu dobrar aqui e o meu palpite estiver certo, agora vai ter 16. Então, 2, 4, 8, 16.*

(2) **Guilherme***: Então, se for dobrando sucessivamente o retângulo...*

(3) **Lucas***: Ele vai dobrar a quantidade de números, deu* [conta] *32, então, se dobrar de novo, vai dar 64 e depois 128.*

(4) **Guilherme***: E se não são retângulos, são quadrados?*

(5) **Lucas***: Isso aqui são retângulos, olha* [mostra a dobradura].

(6) **Lucas***: Eu fui até 64.*
(7) **Guilherme***: Eu fui até 35.*
(8) **Lucas***: 32 então... Como você consegue contar 35 quadrados, se esse negócio é retangular? Então, ele sempre vai dar um número par que vai ser múltiplo de 2* [Aproximo-me do grupo].
(9) **Guilherme***: Eu consegui até 32 quadrados, ele* (Lucas) *foi até 128...*
(10) **Pesq***.: Vamos pensar assim: quando vocês não dobraram nada, vocês tinham quantos retângulos?*
(11) **Lucas***: Um.*
(12) **Pesq***.: Então, você tem dois valores: nenhuma dobradura e um retângulo. Quando você dobrou uma vez, uma dobradura, quantos retângulos gerou?*
(13) **Guilherme***: 2.*
(14) **Pesq***.: Quando você dobrou duas vezes, quantos retângulos gerou?*
(15) **Lucas***: 4.*
(16) **Guilherme***: Porque sempre vai dobrando, é uma folha dobrada ao meio.*
(17) **Lucas***: Então, vai sempre dobrar o resultado anterior.*
(18) **Pesq***.: Então, o que acontece? O que eu estou relacionando?*
(19) **Guilherme***: As dobraduras e os retângulos. Posso dizer que x é o número de dobraduras e y o número de retângulos formados.*
(20) **Pesq***.: E são?*
(21) **Lucas***: Variáveis.*
(22) **Pesq***.: E uma depende da outra?*
(23) **Guilherme***: Sim.*
(24) **Pesq***.: Qual é a variável independente e a dependente?*
(25) **Guilherme***: A dependente é os retângulos.*
(26) **Pesq***.: Eu tenho todos os retângulos possíveis? Eu tenho 1 retângulo, 2, 3, 4...*
(27) **Guilherme***: Não!*
(28) **Pesq***.: Mas eu posso dobrar 1, 2, 3, 4... Os retângulos dependem...*
(29) **Lucas***: Do número de dobradura, as dobraduras são independentes.*
(30) **Guilherme***: Eu posso sempre dobrar, mas os retângulos vão ser dependentes das dobraduras.*
(31) **Pesq***.: Isso mesmo* [Afasto-me do grupo]
(32) **Lucas***: x é quantas vezes foi dobrado.*
(33) **Guilherme***: x = y vezes 2... não, não!*
(34) **Lucas***: x = y vezes 2?... Não. Dobrei uma vez, tem dois; dobrei duas vezes; tem quatro.*
(35) **Guilherme***: Uma dobradura tem quantos retângulos?*
(36) **Lucas***: Ele vai aumentar.* [Lucas refere-se ao fato de a variação não ser constante. O crescimento não apresenta um comportamento linear]
(37) **Guilherme***: Me perdi!*
(38) **Lucas***: x = y vezes 2.*
(39) **Guilherme***: Digamos que é uma dobradura.*
(40) **Lucas***: Sim, vai ter 2 (retângulos)*
(41) **Guilherme***: Então,* $x = y \cdot 2$ *quantos retângulos foram gerados, 2, quantas dobraduras, uma, ... Achei a função. Vê se está certo.*
(42) **Lucas***: Acho que não...* [Retorno ao grupo]
(43) **Pesq***.: Tu achas que sempre multiplica por 2?*
(44) **Guilherme***: Sim, porque é sempre os números em dobro, porque o papel dobra, então, sempre vai ser números múltiplos de dois para cima.*
(45) **Pesq***.: Mas se eu dobrar quatro vezes, dá oito?*
(46) **Guilherme***: Não!*
(47) **Pesq***.: Ela dobra, essa operação, estou de acordo, mas agora eu tenho que testar. Essa relação que você registrou aqui* [aponto para o registro do aluno, que define $y = 2 \cdot x$] *sempre fecha?*
(48) **Guilherme***: Testamos, se eu dobrar duas vezes, fecha...*
(49) **Pesq***.: Quando dobra três vezes, dá 6 retângulos pela regra, mas aqui, 3 dobraduras, deu 8 retângulos* [aponta para a folha com o registro do alunos]
(50) **Guilherme***: Se é dobrado quatro vezes... Não, Prof., está certo, não dá?*
(51) **Pesq***.: Três dobraduras vão dar 8 retângulos, não são 6 retângulos, mas a quantidade de retângulos está dobrando, não é?*

(52) **Guilherme***: Então, uma* [dobradura] *vez, dois retângulos, duas dobraduras quatro retângulos, mas depois de três dobraduras não está dando certo, não tem lógica* [Afasto-me do grupo; após um tempo em silêncio, Lucas argumenta]
(53) **Lucas***: A lógica é que não é vezes, é elevado, não é vezes.*
(54) **Guilherme***: Ah, sim, elevado, isso eu cheguei, só que não faz sentido, tipo...*
(55) **Lucas***: 2 elevado na 2 dá 4.*
(56) **Guilherme***: Sim!*
(57) **Lucas***: Dois elevado na 3 dá oito, e assim vai.*
(58) **Guilherme***: Ah, só que não está dando, acho que está errado.*
(59) **Lucas***: Qual é a variável? O independente é o x, no caso.*
(60) **Guilherme***: x ao quadrado? Como podemos expressar a função então?*
(61) **Lucas***: y igual a 2 elevado na quantidade x no caso.*
(62) **Guilherme***: Tem alguma coisa errada, como podemos expressar essa expressão?*
(63) **Lucas***: Quais são as variáveis envolvidas? x é a quantidade de dobraduras, e y é a quantidade de retângulos, então... As variáveis são x e y, usamos x e y para expressar a função; se não tiver dobrado nada, vai ser 2 na 0, é igual a 1; se tiver dobrado uma vez, vai dar2; se você dobrar duas vezes, vai dar 4.*
(64) **Guilherme***: y é o número de retângulo formados, e x o número de dobraduras. Eu não posso multiplicar as dobraduras, eu tenho que multiplicar retângulos, não faz sentido... x=2y. Tem alguma coisa errada. Professora, vem cá depois.* [Aproximo-me do grupo]
(65) **Lucas***: Olha como esse está dando 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128...*
(66) **Guilherme***: Eu não entendi como vai expressar a função porque a incógnita, não sei como colocar na potência, vai ficar para mais, e não tem como eu colocar nas dobraduras, porque é isso que estou procurando...* [Observo o registro e questiono]
(67) **Pesq***.: Qual é o expoente?*
(68) **Guilherme***: No caso, o 2.*
(69) **Pesq***.: É sempre ao quadrado?*
(70) **Guilherme***: Sim, porque sempre vai elevar ao quadrado, não é vezes 2, não é mais dois, é elevado ao quadrado.*
(71) **Pesq***.: Então, eu dobro uma vez, gera dois, quando eu dobro duas vezes, dá 4, quando eu dobro de novo, dá oito, depois, dá 16, então, eu pego esse* [referindo-me ao número de dobraduras] *e boto ao quadrado, mas daí, 3 ao quadrado é 9, não é 8, mas 4 ao quadrado fecha 16 e 5 ao quadrado fecha 25.*
(72) **Lucas***: Não é assim. Não pode ser assim!*
(73) **Pesq***.: Mas ele está relacionando a ideia de ir dobrando, sempre ir dobrando o resultado anterior. É isso que ocorre? Certo. Vamos relembrar qual é a operação matemática que agrupa as multiplicações? Quando eu tenho dois mais dois mais dois mais dois mais dois, a gente diz que é 5 vezes 2. Agora, quando eu tenho 2 vezes 2 vezes 2 vezes 2 vezes 2 nós temos?*
(74) **Lucas***: Uma potência.*
(75) **Professora***: E eu sei qual é o expoente?*
(76) **Guilherme***: Não!*
(77) **Pesq***.: Por que não sei o expoente?*
(78) **Guilherme***: Porque está aumentando.*
(79) **Pesq***.: E se ele está aumentando, ele é...*
(80) **Lucas***: Uma variável.*
(81) **Pesq***.: Uma variável, então, a base da potência é o que faz dobrar o resultado anterior, então, a minha base é...*
(82) **Lucas***: 2.*
(83) **Pesq***.: Agora, a potência é o que está variando, então, como é que posso representar isso?*
(84) **Lucas***: Então, é o dois elevado ao número de dobras, então, é y igual a 2 elevado a x.*
(85) **Guilherme***: Dá uma olhada, professora. Então, são os retângulos em função da quantidade de dobraduras?* [Faço um sinal de positivo, e o aluno Guilherme conclui o registro em silêncio, meio desconfiado] (E1, G1, 9 ago. 2016)

Fonte: Lautério, 2017, p. 151-153

Nesse novo contexto, a variação não corresponde à mesma relação particular do contexto anterior. Conforme indicam os diálogos (linha 1 a 9), os alunos conseguiram identificar a mudança na variação realizando uma redução dos tipos particulares do objeto; por isso, a abstração substantiva adquire uma nova forma:

> [...] a abstração substantiva tem pelo menos duas formas. Em primeiro lugar, ela pode aparecer como objeto simples, não desenvolvido e homogêneo, que "não chegou" a adquirir as diferenciações necessárias; esta será a abstração geneticamente inicial de determinado todo. Em segundo lugar, pode ter a forma de um objeto que em determinado grau do desenvolvimento já perde suas distinções particulares, convertendo-se em homogêneo; neste caso, suas diferenças se nivelam na real redução mútua dos tipos particulares do objeto. No exame da questão sobre a abstração substantiva no que diz respeito à ascensão do abstrato ao concreto, aquela se caracteriza como teórica em contraposição à empírica. (DAVYDOV, 2009, p. 83)

Assim, a partir desse contexto, a abstração substantiva caracteriza-se como teórica, pois reconhecem as variações linear e exponencial como relações particulares de uma relação geral de correspondência. É no processo de análise e dedução da tarefa de estudo que o aluno consegue identificar a determinação entre o singular, particular e universal.

Um contexto é singular em relação à particularidade do conceito, mas o que permite a resolução é a abstração inicial que direciona ao universal. Ou seja, o contexto da tarefa particular representa um tipo de função que é uma relação particular da relação geral de função, mas a resolução do contexto ainda é singular e precisa ser abstraída de forma universal para o pensamento poder movimentar-se em direção a novos contextos.

> A determinação do singular e do universal está intimamente ligada à natureza das abstrações. A lógica dialética considera que fora da cabeça do sujeito cognoscente existem coisas e fenômenos singulares, particulares, que aparecem como produtos e aspectos do desenvolvimento de certa concretude. A base deste processo é a relação objetal absolutamente real, sensório-perceptível, a "célula" desta concretude. E ainda que exista em uma forma totalmente específica de relação objetal, ao mesmo tempo esta "célula" tem as qualidades da forma abstrata universal, que determina o surgimento e o desenvolvimento de outros fenômenos peculiares e singulares dentro de determinado todo. [...] portanto estas peculiaridades servem exatamente de fundamento genético de "célula" de todos os diferentes tipos de valor.
>
> Só no processo de seu desenvolvimento a "célula" revela sua natureza universal, atuando como base de todas as manifestações do concreto; por meio das conexões com essas manifestações realiza a função de unificá-las, de concretizá-las. Aqui o universal corresponde às possibilidades potenciais da base genética de determinado todo. (DAVYDOV, 2009, p. 83)

Como mencionado anteriormente, Davydov (2009) considera que as abstrações iniciais são mais bem designadas pelos termos célula ou abstração substantiva, e define que possuem duas formas: inicial, não homogênea e a desenvolvida, homogênea. Nos diálogos do episódio 4, reconheço que a partir da conexão essencial, a variação é o significado que trás mais sentidos ao alunos para explorar as formas de abstração substantiva, e o seu desenvolvimento permite reconhecer outros significados como a relação e a dependência. O desenvolvimento da abstração substantiva constitui o fundamento genético da universalidade.

O desenvolvimento da abstração substantiva revela a realidade do universal, como inter-relação dos fenômenos particulares e singulares.

> Neste caso, o problema da relação do universal com respeito ao singular — escreve E. Iliénkov — aparece não tanto como problema da relação entre a abstração mental e a realidade objetiva sensorialmente dada, mas como problema da relação entre os fatos sensorialmente dados com os fatos também dados sensorialmente, como relação interna do objeto para si mesmo, de seus diferentes aspectos entre si, como problema da distinção interna da concretude objetal em si mesma. Imediatamente, sobre a base e como consequência desta, aparece também o problema da relação entre os conceitos, que expressam em sua conexão a concretude objetiva dissociada. (DAVYDOV, 2009, p. 84)

A relação geral estrutura-se no desenvolvimento da célula, que é abstrata substantiva e representa a conexão entre diferentes concretos. Nesse sentido, sua constituição é indispensável para atuar no pensamento em movimento de análise e dedução de outras tarefas particulares, pois,

> [...] pela análise, se separou a “célula” de certa totalidade, com isso se cria o fundamento para sua dedução genética por meio da recriação do sistema de conexões que reflete o desenvolvimento da essência, a formação do concreto. Aqui se observa em que formas e por que precisamente nelas se encarna a essência, antes observada, do objeto estudado. Na investigação destas questões cabe recorrer aos conhecimentos sobre as relações, das quais se teve que prescindir na determinação da própria essência. (DAVYDOV, 2009, p. 85)

A célula expressa o sistema de desenvolvimento da conexão essencial, ou seja, é por meio da abstração substantiva da variação enquanto célula que os alunos conseguem analisar a conexão essencial de correspondência do conceito função e, em movimento de síntese, desencadear a generalização. Esse movimento do pensamento representa a redução do concreto ao abstrato.

Dessa forma, considero que o grupo G1, ao analisar o segundo contexto (Figura 3), conseguiu estabelecer a abstração substantiva e generalizar o entendimento sobre variação, buscando agora modelar a sua relação de dependência.

A segunda ação de estudo correspondente à modelação da relação apresentada no contexto do episódio 4, foi desenvolvida com autonomia pelo aluno Lucas (linhas 53 a 61), que, para conseguir representá-la, realizou as ações de avaliação e controle com maior propriedade que o colega Guilherme.

O aluno Lucas tenta comunicar a modelação ao colega Guilherme, que aparenta estar confuso, não acompanhando o raciocínio de Lucas (linhas 63 e 64). Penso que o aluno Guilherme não conseguiu estabelecer a modelação até o momento do episódio, mesmo sendo enunciada pelo colega, porque o seu pensamento ainda não havia estabelecido conexão com o sistema de conceitos necessários ao processo de redução e ascensão do pensamento.

Sendo assim, faço alguns encaminhamentos (linha 67 a 73) para instigá-lo nas ações de controle e avaliação, e Guilherme corresponde. Para auxiliar na conexão entre o sistema conceitual e as abstrações já realizadas, faço menção ao contexto anterior, relacionando as condições de agrupamento das operações. Assim, o aluno consegue vincular o agrupamento de “n” multiplicações ao expoente e à regularidade de “dobrar” a base dessa operação (linhas 74 a 85). É possível reconhecer que os alunos encontram-se na ZDP, pois ainda precisam de intervenções da pesquisadora para avançar, mas também é possível reconhecer que o aluno Lucas desenvolve com maior autonomia as ações de estudo, estando mais próximo da zona de desenvolvimento potencial.

No último contexto (Figura 3), não é explorado o tratamento de equações exponenciais como parte do sistema de conceitos de função, tendo em vista que os alunos ainda não estudaram as equações exponenciais. Caso fossem exploradas apenas as equações em que a quantidade de retângulos é incógnita e não fosse explorada a variável dobradura como incógnita (incógnita no expoente), penso que não estaria reforçando a função como união das relações inversas da equação, o que poderia comprometer a relação geral da função. Sendo assim, limitei-me a explorar a modelação da função, não instigando os alunos a utilizá-la para determinar variáveis correspondentes, o que exigiria novas conexões no sistema de conceitos.

Justifico esse limite pela intenção do momento de não aprofundar o estudo das propriedades da equação exponencial, evidenciando certa resistência em ampliar ainda mais o sistema de conceitos de uma só vez. Hoje, penso que tal escolha pode representar raízes na cultura curricular do ensino de matemática, que estabelece a rotina de apresentar um conceito novo de cada vez, o que fragiliza a constituição do sistema conceitual.

5 Considerações Finais

No experimento didático formativo, é possível identificar que as abstrações iniciais partiam da identificação da variação pelos alunos. No entanto, os contextos permitiam o estabelecimento de abstrações empíricas ainda restritas às relações particulares do conceito no contexto e prescindiam de generalização para estabelecer regularidades na relação de dependência, colocando a abstração da variação em nível teórico. As sistematizações encaminhadas pelo professor precisam consolidar o estabelecimento da relação geral de função e subsidiar elementos de análise para a reflexão sobre futuros contextos. A mudança da relação particular nos próximos contextos contribui para o processo de generalização, e, a partir de novos contextos, os movimentos de análise e reflexão colocam a abstração em nível teórico.

A análise dessa tarefa de estudo permite compreender a contextualização em movimentos que se apoiam em diferentes contextos na exploração da conexão essencial e estabelecendo sentidos e significados às abstrações substantivas. O desenvolvimento do pensamento em redução do concreto ao abstrato dá início às abstrações substantivas, que só se desenvolvem em nível teórico pela ascensão do pensamento do abstrato ao concreto, estabelecendo-se as conexões entre o universal, o particular e o singular.

6 Agradecimentos

Agradeço o apoio a este estudo que conta com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Rio Grande do Sul– FAPERGS, edital Auxílio Recém-Doutor – 04/2019.

7 Referências

DAVYDOV, Vasili. Problemas do Ensino Desenvolvimental – A Experiência da Pesquisa teórica e Experimental na Psicologia. Tradução José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas. 2009. Disponível em: professor.pucgoias.edu.br/.../DAVYDOV%20TRADUÇÃO%20PROBLEMS%20OF%.... Acesso em: 12/09/2015.

REIS, ANA QUELI; NEHRING, C. M. . A contextualização no ensino de matemática: concepções e práticas. Educação Matemática Pesquisa, v. 19, p. 339-364, 2017.

LAUTÉRIO, Ana Queli Mafalda Reis. A contextualização da matemática como princípio educativo no desenvolvimento do pensamento teórico: exploração de contextos no movimento do pensamento em ascensão do abstrato ao concreto. Tese (doutorado) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Ijuí/RS, 2017.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch.. *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 2008.