



VIII Jornada Nacional de
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
XXI Jornada Regional de
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Educação Matemática: identidade
em tempos de mudança
06 a 08 de maio de 2020



PROBLEMAS DE TANGÊNCIA ENTRE RETAS E CIRCUNFERÊNCIAS: UM QUARTO PROBLEMA

Dirceu Lima dos Santos
Universidade de Passo Fundo
limamat@upf.br

Indinara Scarpari de Melo
Universidade de Passo Fundo
166223@upf.br

Jéssica Elisabeth Johann Dias
Universidade de Passo Fundo
166201@upf.br

Eixo Temático: Formação e Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática

Modalidade: Comunicação Científica

Resumo

A pesquisa teórica desenvolvida neste artigo quer mostrar que, se tratando de matemática, o conhecimento vai sendo produzido sequencialmente e esse fato pode ser percebido na sistematização e consolidação da Geometria Analítica. Esta foi construída por notáveis matemáticos, ao longo da história da humanidade, a partir da fusão da aritmética, da geometria e da álgebra. Considerando que, em matemática, o novo sempre sofre influência daquele que já existe, a partir de conceitos utilizados para a resolução de problemas clássicos de tangência, tais como os de retas tangentes a uma circunferência, que são paralelas ou perpendiculares a uma reta qualquer. Assim, pode-se estabelecer um novo problema de tangência, de tal forma que as retas tangentes a uma circunferência podem assumir uma posição qualquer em relação à outra reta, secante ou externa a essa circunferência. O estudo do problema que está sendo proposto não consta na literatura, favorece o ensino e aprendizagem da matemática à medida que estimula o uso de conceitos já existentes, que estão relacionados com conteúdos que envolvem o estudo da reta e da circunferência.

Palavras-chave: História da Matemática, Geometria Analítica, Problemas de Tangência.

1 Introdução

A Matemática e o homem são parceiros inseparáveis, sempre caminharam juntos. Esse caminhar, por muitas vezes, acontece de uma forma previamente planejada e em outras ocasiões acontece ao acaso, sem um propósito específico. O certo é que o tempo tem mostrado que a evolução da humanidade está diretamente associada à evolução da

Matemática. Essa, ao longo de sua existência, recorreu a Matemática para resolver problemas que a afetavam e isso é inegável.

A evolução da Matemática contou com o talento e a genialidade de matemáticos que se apropriaram dessa ciência e a difundiram, em algumas ocasiões, sem que houvesse a preocupação com sua aplicabilidade no contexto em que viviam. Apenas queriam provar um teorema, desenvolver uma nova fórmula ou simplesmente acabavam mergulhando em problemas que envolviam a Matemática, porque nesses pulsava o espírito investigativo que habita cada ser humano. Muitas outras vezes, a necessidade e a sobrevivência era o que instigava, impulsionando a busca de novos saberes matemáticos. De certo é que o conhecimento matemático evoluiu na sombra de um conhecimento já existente, pois pouco se cria de novo nessa área sem que um saber já conhecido tenha sido utilizado.

A Geometria Analítica foi sendo desenvolvida ao longo do tempo, a partir de uma fusão da aritmética, da geometria e da álgebra. Essa foi sendo construída, através da geometria dos Caldeus, da geometria e da álgebra dos Egípcios, da álgebra dos babilônios, da geometria dos gregos que, segundo Laval e Santos (2012), mesmo não demonstrando clareza no que se refere a noções de composição de deslocamentos ou de movimentos, já utilizavam corretamente as “coordenadas” em relação a dois ou mais eixos no plano para o estudo da geometria.

Eves (2004) destaca que mesmo não possuindo noção precisa de coordenadas, os gregos conseguiam relacionar corretamente eixos, podendo, então, fixar pontos sob o mesmo, tendo como uma das últimas e mais importantes contribuições para a geometria: a teoria das cônicas.

Segundo Silva (1994, Apud LAVAL e SANTOS, 2012, p. 175), “alguns historiadores da matemática veem, nos trabalhos dos gregos sobre cônicas, o início da geometria analítica, chegando a considerá-los como verdadeiros inventores dessa parte da matemática”.

A Construção da geometria analítica ainda passa pela magnífica obra *Os Elementos* de Euclides, pelas cônicas de Aristeu, o velho, pelas cônicas de Menaecmus, de Arquimedes, de Apolônio de Perga, pela álgebra de Diofantes, sendo que este, de acordo com Boyer (1974), foi o maior algebrista grego do período chamado Segunda Idade Alexandrina, pela álgebra de François Viète, desenvolvida no século XVI, que acaba influenciando significativamente os trabalhos de René Descartes e Pierre Fermat, que sistematizaram a geometria analítica no século XVII, inferindo símbolos matemáticos básicos com os quais se trabalha atualmente.

De acordo com Struik (1997), as contribuições da obra de Descartes foram no sentido do desenvolvimento posterior da álgebra e para o tratamento das curvas algébricas. Já a obra de Fermat se aproxima mais da geometria analítica que conhecemos atualmente. Embora os

trabalhos de Descartes e Fermat sejam inegavelmente importantes para a consolidação da geometria analítica, outros matemáticos, como Van Schotten, Johann van Waverem, Jean de Witt, John Wallis, Desargues e Philippe de La Hire trouxeram grandes contribuições à geometria analítica. Destes matemáticos, destaca-se o trabalho de La Hire, que em sua obra *Novos Elementos das Seções Cônicas*, apresentou um dos primeiros exemplos de uma superfície dada analiticamente por uma equação de três incógnitas, deixando uma semente da geometria analítica espacial, a qual Alexis de Clairaut, em sua obra *Recherches sur les courbes à double courbure*, apresentou o primeiro tratado de geometria analítica no espaço.

Outros matemáticos de renome, como Leonard Euler, Joseph Louis Lagrange contribuíram para a evolução da geometria analítica, mas ninguém foi mais importante na sua consolidação que Gaspar Monge. Este se encarregou de expandir a matemática que tratava da geometria analítica, tornando-a uma disciplina da área de matemática.

A história mostra que o conhecimento matemático é cumulativo, que a partir de um já existente, outro pode ser aperfeiçoado ou criado. Esse fato fica muito bem retratado por Isaac Asimov, no prefácio do livro de Carl Boyer, a *História da Matemática* (1974), onde relata que “apenas na matemática não há correção significativa, só extensão” e ainda que “cada grande matemático acrescenta algo ao que veio antes, mas nada tem que ser removido”.

É nesse espírito, observando os livros didáticos de matemática que tratam do estudo de retas tangentes a uma circunferência, que o presente artigo tem por objetivo acrescentar um novo problema aos três, considerados clássicos, já existentes, tomando como ponto de partida, para o problema proposto, conceitos básicos da Geometria Analítica, que estão presentes na literatura, sob uma perspectiva não usual e uma abordagem não vetorial, uma vez que proporciona uma aproximação com a metodologia empregada na Educação Básica.

2 Os Problemas Clássicos de Tangência Presentes na Literatura

Nesta seção, são apresentados três problemas clássicos de tangência que estão presentes na grande maioria dos livros didáticos utilizados na literatura voltada à Geometria Analítica, quando é abordado o assunto relacionado a posições relativas entre retas e circunferências. Para isso, será considerada uma reta qualquer, na forma reduzida $r: y - mx + b$ ou $r: y = mx + b$, uma circunferência $\beta: (x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$, escrita na sua forma reduzida e um ponto $P(x_p, y_p)$.

Os dois primeiros problemas apresentam retas tangentes à circunferência β que são paralelas ou perpendiculares à reta r e o terceiro problema mostra retas tangentes à circunferência β , que são tiradas por um ponto $P(x_p, y_p)$, externo a essa circunferência.

Todos os problemas mencionados serão tratados por meio de uma abordagem não vetorial.

2.1 Retas Tangentes a uma Circunferência Paralelas a uma Reta Qualquer

As equações das retas t , tangentes a uma circunferência, para o primeiro e segundo problema clássico de tangência, podem ser determinadas resolvendo uma equação que compare a distância entre o centro da circunferência, de coordenadas $C(h, k)$, até a reta t com o comprimento R , que representa o raio dessa circunferência. De acordo com Steinbruch e Basso (1991), para que uma reta seja tangente à circunferência, sua distância ao centro da circunferência deve ser igual ao raio.

Trazendo para uma expressão mais atual, a expressão que é proposta por Steinbruch e Basso (1991), ajustada para as coordenadas designadas para o centro C da circunferência e as retas t , tangentes a essa circunferência, essa expressão pode ser representada por:

$$d_{Ct} = \frac{|Ax_c + By_c + TI|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R,$$

em que d_{Ct} indica a distância do centro C da circunferência até a reta t , A e B são, respectivamente, os coeficientes de x e y , da forma geral da equação da reta, TI é o termo independente dessa reta e R é o raio da circunferência.

No primeiro caso (Figura 1) as retas tangentes à circunferência, em virtude de serem paralelas à reta r , diferem desta apenas pelo coeficiente linear, uma vez que a condição de paralelismo entre elas faz com que seus coeficientes angulares sejam iguais.

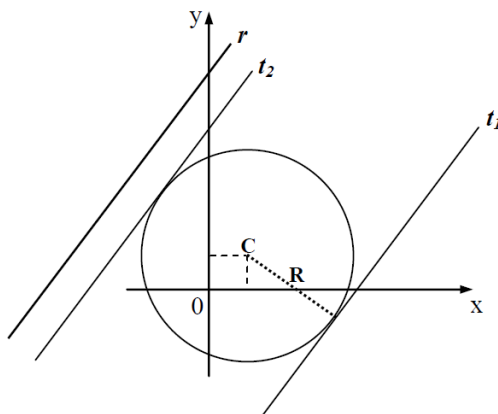


Figura 1 – representação geométrica do problema inicial
Fonte: os autores

Na Figura (1), a equação reduzida da reta r é designada como $y = m_r x + b$. As equações das retas tangentes t_1 e t_2 , considerando a condição de paralelismo entre as retas tangentes e a reta r essas podem ser escritas como sendo $t_1 : y = m_r x + b_1$ e $t_2 : y = m_r x + b_2$ onde m_r é o coeficiente angular das retas r , t_1 e t_2 e b , b_1 e b_2 são, respectivamente, o coeficiente linear da reta r e os coeficientes lineares das retas t_1 e t_2 tangentes à circunferência.

As equações das retas tangentes t , de incógnitas b_1 e b_2 , serão determinadas a partir da solução da equação (1), que foi adaptada para que se possa trabalhar com a equação reduzida da reta.

$$\frac{|m_r h - k + b|}{\sqrt{m_r^2 + 1}} = R \quad (1)$$

Esta compara a distância do centro da circunferência, um ponto de coordenadas $C(h, k)$, até a reta t com o raio R da mesma circunferência.

Sendo a equação (1) uma equação modular, a incógnita b determina dois valores, b_1 e b_2 , que são os coeficientes lineares das retas tangentes à circunferência paralelas à reta r .

2.2 Retas Tangentes a uma Circunferência Perpendiculares a uma Reta Qualquer

O segundo problema, aqui apresentado, também envolve posições relativas entre duas retas. Neste caso, as retas tangentes à circunferência são perpendiculares à reta r qualquer (Figura 2).

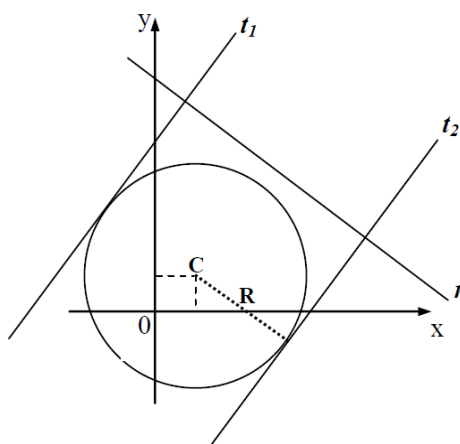


Figura 2 – representação geométrica do segundo problema
Fonte: os autores

Considerando que a reta r tem equação $y = m_r x + b$, pela condição de perpendicularismo, as equações das retas t , t_1 e t_2 , tangentes à circunferência, terão equações que diferem da equação da reta r pelo coeficiente angular e pelo coeficiente linear. Considerando a posição

relativa entre essas retas, que são ortogonais entre si, os coeficientes angulares das retas t são dados pelo inverso e oposto do coeficiente angular da reta r e seus coeficientes lineares, novamente, diferem do coeficiente linear da reta r . Assim, se o coeficiente angular da reta r é dado por m_r , o coeficiente angular das retas t é dado por $m_t = -\frac{1}{m_r}$ e os coeficientes lineares

podem ser escritos como sendo b_1 e b_2 .

Para determinar as incógnitas b_1 e b_2 das retas t desse problema, pode-se utilizar o mesmo processo proposto para o primeiro problema, ou seja, compara-se a distância do centro da circunferência à reta t com o comprimento do raio dessa circunferência. A solução da equação (2).

$$\frac{|m_t h - k + b|}{\sqrt{m_t^2 + 1}} = R \quad (2)$$

A equação (2) determina dois valores para b , designados como b_1 e b_2 , uma vez que novamente tem-se uma equação modular.

2.3 Retas Tangentes a uma Circunferência Tiradas por um Ponto Externo à Circunferência

O terceiro problema clássico de tangência trata de retas tangentes a uma circunferência, tiradas por um ponto P externo a essa circunferência (Figura 3).

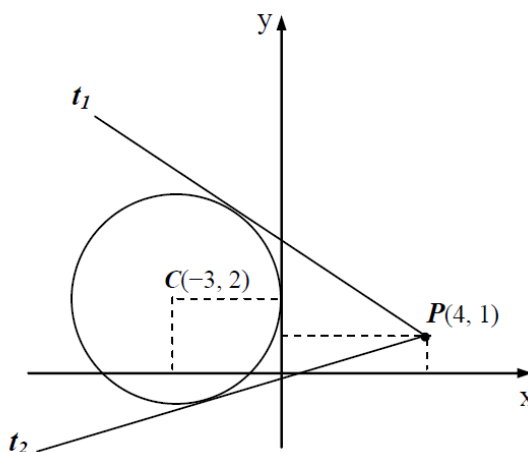


Figura 3 – representação geométrica do terceiro problema
Fonte: os autores

Neste problema não é mais possível utilizar conceitos relacionados a posições relativas entre retas, o que faz com que outros conceitos básicos da Geometria Analítica venham a ser utilizados.

Para obter a equação de uma reta é necessário e suficiente que sejam conhecidos um ponto pertencente à reta e a declividade desta, ou dois pontos que pertencem ao lugar geométrico da mesma reta. No problema proposto, por ser conhecido o ponto $P(x_p, y_p)$, por onde são tiradas as retas tangentes à circunferência, as equações dessas retas seriam facilmente escritas, se os coeficientes angulares fossem conhecidos. Isso coloca como incógnita das equações das retas tangentes os coeficientes angulares.

Da literatura, sabe-se que conhecidos um ponto pertencente a uma reta r e o coeficiente angular dessa reta, a equação pode ser escrita a partir da seguinte expressão:

$$y - y_p = m(x - x_p) \quad (3)$$

A equação (3) passa a ser a equação das retas t , tiradas pelo ponto P , que são tangentes à circunferência. A incógnita m da equação (3) pode ser obtida comparando a distância do centro $C(h, k)$ da circunferência até a reta t , tangente a esta, com o comprimento do raio dessa circunferência.

A equação (4) que compara a distância do centro $C(h, k)$ da circunferência até a reta t , com o comprimento do raio R dessa circunferência, está representada pela seguinte expressão:

$$\frac{|mx_p - k + mh + y_p|}{\sqrt{m^2 + 1}} = R \quad (4)$$

A equação (4), da mesma forma da equação (1) e (2), é uma equação modular, por essa razão determinará dois valores para a incógnita m , que serão designados por m_1 e m_2 . Com esses valores m_1 e m_2 , a equação (3), que representa a equação das retas t , assumem as formas algébricas $y - y_p = m_1(x - x_p)$ e $y - y_p = m_2(x - x_p)$. Para representar as equações das retas tangentes a uma circunferência, tiradas por um ponto $P(x_p, y_p)$, externo a essa circunferência, essas podem ser escritas na forma reduzida ou geral.

3 Um Quarto Problema de Retas Tangentes em uma Circunferência

Este quarto problema não figura em livros didáticos e pode ser explorado pelos professores, em sala de aula, uma vez que envolve diferentes conteúdos da Geometria Analítica, enriquecendo o conhecimento do estudante.

O problema proposto permite determinar retas tangentes a uma circunferência, a partir da equação de uma reta qualquer, pertencente ao mesmo plano da circunferência, independente de sua posição relativa a essa. Para isso, considera-se que as retas tangentes à circunferência formam um ângulo θ com uma reta r qualquer de tal forma que $0^\circ < \theta < 180^\circ$ e $\theta \neq 90^\circ$.

Para determinar as equações dessas retas tangentes será utilizada uma metodologia análoga a que foi empregada para solucionar os dois primeiros problemas apresentados. A resolução parte de um princípio básico da geometria analítica, que para escrever a equação de uma reta, uma das condições necessárias é conhecer sua declividade e seu coeficiente linear. Logo, estas serão as incógnitas a serem desvendadas para escrever as equações das retas tangentes a uma circunferência, nas condições descritas.

Inicialmente, para determinar as declividades das retas tangentes, são utilizados conceitos matemáticos que permitem calcular a tangente de um ângulo qualquer formado entre duas retas concorrentes.

Se, essas retas concorrentes forem p e q e o ângulo agudo considerado for θ , conforme Figura 5,

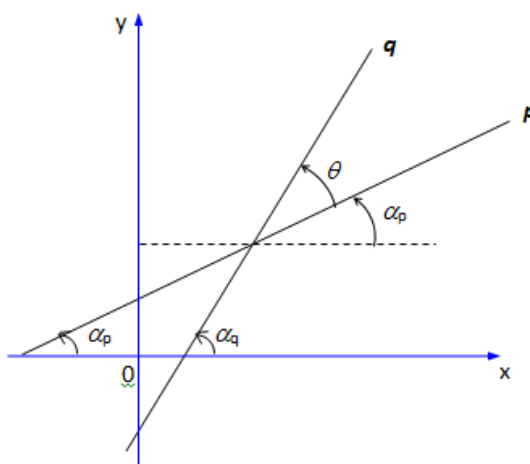


Figura 5 – esquema gráfico para obtenção da tangente do ângulo θ

Fonte: Os autores

conclui-se que

$$\alpha_p + \theta = \alpha_q \Rightarrow \theta = \alpha_q - \alpha_p \quad (5)$$

A tangente do ângulo θ de (5) é dada por

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\alpha_q - \alpha_p) \quad (6)$$

De acordo com IEZZI (1995), das transformações trigonométricas, temos que a tangente da diferença de dois ângulos, pode ser representada pela razão entre a diferença das tangentes desses ângulos e a soma de 1 (um) com o produto das tangentes desses mesmos ângulos. Assim, a $\operatorname{tg}(\alpha_q - \alpha_p)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$\operatorname{tg}(\alpha_q - \alpha_p) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_q - \operatorname{tg} \alpha_p}{1 + \operatorname{tg} \alpha_q \cdot \operatorname{tg} \alpha_p} \quad (7)$$

Substituindo (7) em (6) obtém-se:

$$tg\theta = \frac{tg\alpha_q - tg\alpha_p}{1 + tg\alpha_q \cdot tg\alpha_p} \quad (8)$$

Para que se obtenha a tangente do ângulo agudo, formado entre as retas p e q , a equação (8) deve ser escrita da seguintes forma:

$$tg\theta = \left| \frac{tg\alpha_q - tg\alpha_p}{1 + tg\alpha_q \cdot tg\alpha_p} \right| \quad (9)$$

Para as equações das retas t , tangentes a uma circunferência β , que formam um ângulo θ com uma reta r qualquer, a equação (9) assume a seguinte forma:

$$tg\theta = \left| \frac{tg\alpha_r - tg\alpha_t}{1 + tg\alpha_r \cdot tg\alpha_t} \right| \quad (10)$$

Como a $tg\alpha_r$ e $tg\alpha_t$ representam, respectivamente, a declividade m da reta r e as declividades m das retas t , a equação (10) pode ser reescrita como segue:

$$tg\theta = \left| \frac{m_r - m_t}{1 + m_r \cdot m_t} \right| \quad (11)$$

Isolando m_t , na equação (11), obtém-se as equações para o cálculo das declividades m das retas tangentes à circunferência β . Essas assumem a seguinte forma:

$$m_t = \frac{m_r - tg\theta}{1 + tg\theta \cdot m_r} \quad (12)$$

e

$$m_t = \frac{m_r + tg\theta}{1 - tg\theta \cdot m_r} \quad (13)$$

Assim, uma vez que já foi considerado que a reta r tem equação $y = m_r x + b$, pode-se afirmar que as retas t terão equações $y = \left(\frac{m_r - tg\theta}{1 + tg\theta \cdot m_r} \right) x + b_1$ e $y = \left(\frac{m_r + tg\theta}{1 - tg\theta \cdot m_r} \right) x + b_2$. As declividades dessas retas serão, respectivamente, $m_{t1} = \frac{m_r - tg\theta}{1 + tg\theta \cdot m_r}$ e $m_{t2} = \frac{m_r + tg\theta}{1 - tg\theta \cdot m_r}$.

Considerando que é conhecida a declividade da reta r , o lugar geométrico do centro da circunferência, o comprimento de seu raio e o ângulo θ , que a reta r faz com as retas t , tangentes à circunferência, as incógnitas que representam o coeficiente linear das retas tangentes são obtidas pelas equações

$$\frac{|m_{t1} \cdot h - k + b|}{\sqrt{m_{t1}^2 + 1}} = R \quad (14)$$

e

$$\frac{|m_{t_2} \cdot h - k + b|}{\sqrt{m_{t_2}^2 + 1}} = R \quad (15)$$

Se for suposto que r tem equação $y = \frac{2}{3}x + 2$, β tem equação $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ e

$\theta = 45^\circ$, então, $m_r = \frac{2}{3}$, as coordenadas do centro da circunferência (h, k) tem $h = 1$ e $k = -2$, seu raio é igual a 3 e a $tg\theta = tg45^\circ = 1$.

As declividades das retas t , tangentes à circunferência, que formam um ângulo θ com a reta r são

$$m_{t_1} = \frac{m_r - tg\theta}{1 + tg\theta \cdot m_r} \Rightarrow m_{t_1} = \frac{3}{1 + 1 \cdot \frac{2}{3}} = -\frac{1}{5}$$

e

$$m_{t_2} = \frac{m_r + tg\theta}{1 - tg\theta \cdot m_r} \Rightarrow m_{t_2} = \frac{3}{1 - 1 \cdot \frac{2}{3}} = 5$$

Os coeficientes lineares das retas tangentes à circunferência β para a declividade $m_{t_1} = -\frac{1}{5}$ são dados por:

$$\frac{|m_{t_1}h - k + b|}{\sqrt{m_{t_1}^2 + 1}} = R \Rightarrow \frac{\left| -\frac{1}{5} \cdot 1 - (-2) + b \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{5} \right)^2 + 1}} = 3 \Rightarrow b = \pm 3 \frac{\sqrt{26}}{5} - \frac{9}{5}$$

Para a declividade $m_{t_1} = -\frac{1}{5}$ e coeficientes lineares $b = \pm 3 \frac{\sqrt{26}}{5} - \frac{9}{5}$, as retas tangentes t , que serão designadas por t_1 e t_2 são dadas por:

$$t_1 : y = -\frac{1}{5}x + 3 \frac{\sqrt{26}}{5} - \frac{9}{5} \quad \text{e} \quad t_2 : y = -\frac{1}{5}x - 3 \frac{\sqrt{26}}{5} - \frac{9}{5}$$

Os coeficientes lineares das retas tangentes para a declividade $m_{t_2} = 5$ são dados por:

$$\frac{|m_{t_2}h - k + b|}{\sqrt{m_{t_2}^2 + 1}} = R \Rightarrow \frac{|5 \cdot 1 - (-2) + b|}{\sqrt{5^2 + 1}} = 3 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{26} - 7$$

Para a declividade $m_{t_2} = 5$ e coeficientes lineares $b = \pm 3\sqrt{26} - 7$, as retas tangentes t , que serão designadas por t_3 e t_4 são dadas por:

$$t_3 : y = 5x + 3\sqrt{26} - 7 \quad \text{e} \quad t_4 : y = 5x - 3\sqrt{26} - 7$$

A Figura (6) mostra a representação geométrica da reta $r: y = \frac{2}{3}x + 2$ e das retas t , designadas por t_1, t_2, t_3 e t_4 , tangentes à circunferência $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$, que formam um ângulo $\theta = 45^\circ$.

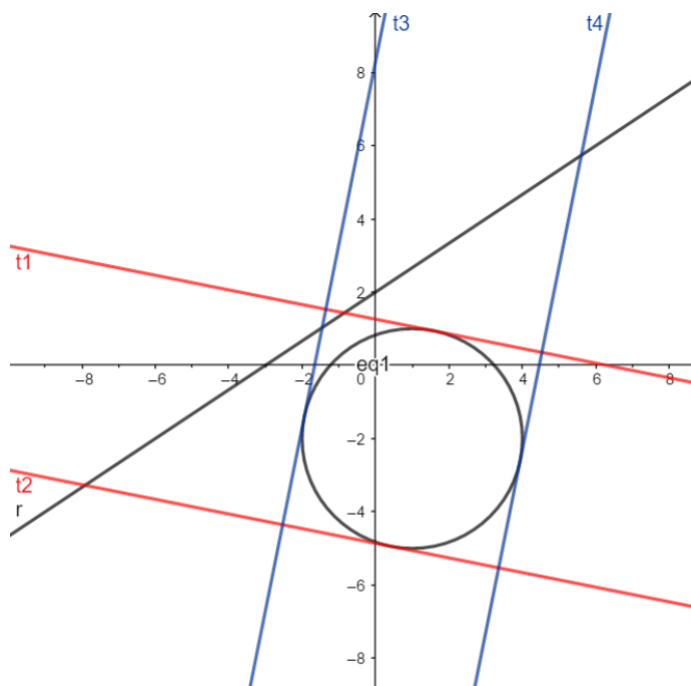


Figura 6 – esquema gráfico da resolução do problema
Fonte: os autores – construção com o software GeoGebra

A representação geométrica da Figura (6) confirma os resultados obtidos no cálculo das declividades m_{t1} e m_{t2} , que apresentaram valores inversos e opostos, demonstrando no plano cartesiano uma condição de perpendicularismo entre as retas t_1, t_3 e t_4 e t_2, t_3 e t_4 .

4 Considerações Finais

A história que apresenta a evolução do conhecimento matemático, através do tempo, mostra que esse ocorre, em uma grande maioria dos casos, através do acúmulo de saberes. A Geometria Analítica é uma área da Matemática que foi sendo construída ao longo do tempo, a partir de outras três grandes áreas, que já estavam mais avançadas para a época, a aritmética, a geometria e a álgebra, comprovando que a fusão de conhecimentos é capaz de consolidar e produzir novos conhecimentos sem que nada do que já era sabido se perca.

A construção do conhecimento e a apropriação da matemática, pelos estudantes, ocorrem de uma forma similar à evolução dessa ciência, que está descrita nos livros de história da matemática. A qual acontece de forma sequencial, a partir do acúmulo de informações que

servem de base para a aprendizagem e descoberta de diferentes caminhos, permitindo chegar à resolução de um problema conhecido ou na proposição e solução de um novo problema.

Ausubel (1973) defende que a aprendizagem ocorre quando uma nova informação ancora-se em conceitos já presentes nas experiências de aprendizado anteriores. Essa afirmação coloca o conhecimento já existente, aquele que o estudante já se apropriou como um aporte muito importante para a construção de um novo conhecimento.

Anastasiou e Alves (2006), afirmam que “construir um novo problema, a partir de um ou mais problemas existentes, ou solucionar um novo problema partindo de experiências vividas, é uma forma de criar um novo contexto capaz de resgatar conteúdos já abordados e estimular a busca de novos conteúdos, proporcionando aos estudantes uma aprendizagem significativa”.

O objetivo de propor um quarto problema de retas tangentes a uma circunferência, que se aproxime aos já existentes, foi, justamente, para mostrar que com uma boa base de informações é possível propor situações que desafiem o estudante a evoluir em determinados conteúdos ou até chegar a novas descobertas.

Uma vez estabelecidas as equações que permitem encontrar tangentes a uma circunferência, a partir das informações de uma reta qualquer pertencente ao mesmo plano dessa circunferência, o exemplo apresentado, que considerou que as retas tangentes formassem um ângulo de 45° com uma reta qualquer, mostrou que, para essa situação, foram encontradas quatro retas tangentes, paralelas e perpendiculares aos pares. Já nos problemas clássicos, que tratam de retas tangentes à circunferência, que são paralelas ou perpendiculares a uma reta qualquer, o número de retas tangentes à circunferência encontradas são duas.

Entende-se que o problema pode ser levado para a sala de aula sendo, inicialmente, como uma provocação aos estudantes, dando, a esses, tempo para buscarem uma solução, que pode ser diferente da apresentada neste artigo e, após esse trabalho inicial, pode-se apresentar os caminhos aqui propostos, utilizando outros ângulos notáveis a ser formados entre as retas tangentes à circunferência e uma reta qualquer.

A construção geométrica das posições das retas tangentes à circunferência, em relação a uma reta qualquer, pode ser feita com o auxílio de um software, como por exemplo, o GeoGebra. De posse dos lugares geométricos envolvidos no problema de tangência, os estudantes poderão visualizar todas as curvas envolvidas e associar suas posições com as que a literatura apresenta ou verificar outras posições que estejam de acordo com o ângulo θ pré-determinado entre o conjunto de retas tangentes e a reta qualquer.

Acredita-se que propostas de trabalhos dessa natureza contribuem para tornar conteúdos matemáticos mais atraentes, retomando e fixando conteúdos já trabalhados que podem

despertar nos estudantes o espírito investigativo que estava presente nos grandes matemáticos que construíram a História da Matemática até o tempo presente.

A criação de uma nova situação, a partir de uma base de conhecimentos já adquiridos, pode ser utilizada em diferentes áreas da Matemática. Além disso, estimula os estudantes a novas descobertas, contribuindo com a formação de futuros professores de Matemática e com o desenvolvimento profissional do seu professor.

5 Referências

ANASTASIOU, L. das G. C.; ALVES, L. P.(orgs.). Processos de ensinagem na universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em sala de aula. 6. Ed. – Joinville, SC: UNIVILLE, 2006.

AUSUBEL, D. P. Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento. Buenos Aires: El Ateneo, 1973.

BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo, SP. Editora Edgar Blucher LTDA, 1974. 488 p.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. 843p.

IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática 3 Elementar – Trigonometria*. São Paulo, SP: Editora Atual, 1995. 334p.

LAVAL, A.; SANTOS, D. L. Uma história concisa da geometria analítica. In: DANYLUK, O. S., ET AL (Orgs.). *História educação matemática: escrita e reescrita de histórias*. Porto Alegre, RS: Editora Meridional LTDA, p. 170-207. 2012.

STEINBRUCH, A.; BASSO, D. *Geometria analítica plana*. São Paulo: Makron, MacGraw, 1991. 193p.

STRUICK, D. J. *História Concisa da Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Gradiva, 1997. 396p.