VI MOSTRA GAÚCHA DE PRODUTOS EDUCACIONAIS
01 JULHO DE 2022
PPGECE Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas
UNIVATES

NÚMEROS REAIS: UMA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA E POSSIBILIDADES DE CONEXÕES

Ismael Batista Maidana Silvestre – ismael.silvestre@ufn.edu.br
Universidade Franciscana - UFN, Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática
Santa Maria - RS
Vanilde Bisognin – vanilde.bisognin@ufn.edu.br
Universidade Franciscana - UFN, Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática
Santa Maria - RS
Eleni Bisognin – eleni.bisognin@ufn.edu.br
Universidade Franciscana - UFN, Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática
Santa Maria - RS

Resumo: Nos últimos anos muitos pesquisadores em educação matemática tem se preocupado com o desenvolvimento de trabalhos que possibilitem melhoras nos processos de ensino e aprendizagem. É nesse contexto que propomos essa sequência didática – atividades que envolvem uma representação geométrica de números reais – com várias possibilidades de conexões, além do desenvolvimento de processos como: raciocínio e prova, comunicação, representações e generalizações. Identificamos possibilidades de conexões com progressões geométricas, funções, geometria e números reais. A sequência pode ser aplicada em turmas dos anos finais do ensino médio, necessitando de poucos recursos (papel e lápis, basicamente). As atividades são de cunho investigativo, pondo o aluno como pesquisador e ativo no processo, estando em condições de desenvolver aprendizagem, buscando padrões, realizando conexões e, ao final, identificando e comprovando generalizações.

Palavras-chave: Representação geométrica, conexões, progressões, funções, geometria.

1 INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios presentes na matemática contemporânea é a imagem de uma ciência pronta, sem possibilidades de novas teorias, ou mesmo de mudanças em conceitos já estabelecidos. Lakatos (1978), em sua obra "*A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações*", ainda na metade do século passado, procurou desmistificar essa concepção ao propor atividades envolvendo a relação de Euler ($V - A + F = 2$, em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces). Em uma turma fictícia, estudantes encontraram contra exemplos, o que proporcionou uma evolução no entendimento de propriedades necessárias, de poliedros, para garantir a aplicabilidade dessa fórmula.

Algumas vertentes da educação matemática têm se preocupado em mostrar aos estudantes que é possível pesquisar e avançar na construção teórica, inovação e geração de novos conhecimentos na matemática. Um caminho utilizado pelos pesquisadores é por o aluno como sujeito ativo no processo de ensino e aprendizagem, capaz de pensar e buscar estratégias significativamente ricas e promotoras de aprendizagem. Atividades envolvendo padrões e conexões são possibilidades potenciais para por o aluno nessa concepção.

Nessa perspectiva, de propor atividades que sejam potencialmente capazes de envolver os estudantes, incentivá-los na pesquisa, promover conexões e o desenvolvimento de raciocínio matemático, é que propomos essa sequência didática. No próximo item, é apresentada a concepção desse produto educacional.

1.1 A concepção da Sequência de Didática

Atualmente sou aluno do curso de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Franciscana – UFN de Santa Maria, RS. No semestre passado cursei a disciplina de Análise Matemática: ensino e aprendizagem, uma disciplina eletiva ofertada pelo programa. Os conteúdos relacionados com números reais fazem parte da ementa dessa disciplina.

Em uma aula, a professora da disciplina comentou sobre a construção da espiral pitagórica – com intenção de representar geometricamente alguns números irracionais - e propôs que riscássemos um pouco sobre essa ideia de construção. Eu, talvez por desconhecimento dessa espiral, fui por outro caminho e fiz o seguinte procedimento:

> 1º) Desenhei no primeiro quadrante um quadrado de lado 1 e calculei a sua diagonal, utilizando o teorema de Pitágoras;
>
> 2º) Com o valor dessa diagonal, construí um quadrado no segundo quadrante cujo lado tinha a medida dessa diagonal (note que esse novo quadrado tem lado $\sqrt{2}$). Novamente calculei a diagonal desse quadrado;
>
> 3º) Com esse novo valor, da diagonal do segundo quadrado, construí um terceiro quadrado no terceiro quadrante. Calculei sua diagonal;
>
> 4º) Repeti mais uma ou duas vezes esse procedimento e observei os valores encontrados para as diagonais.

A sequência de valores das diagonais apresentam muitas propriedades interessantes: alternadamente, quadrantes pares e ímpares, são progressões geométricas de números racionais ou irracionais, a depender do número tomado para o lado do primeiro quadrado. É possível construímos funções para essas sequências numéricas. Nos números reais, racionais e irracionais, trabalhar as operações e propriedades. Na geometria, envolver o teorema de Pitágoras, cálculo de diagonais de quadrados. Esses são exemplos de conexões já identificadas nessa atividade. Outras conexões poderão ser observadas, como por exemplo: encontrar padrões na sequência dos valores das áreas desses quadrados.

1.2 Padrões de procedimentos envolvidos nas atividades

O National Council of Teachers of Mathematics – NCTM (NCTM, 2000), forneceram os princípios e os padrões a serem considerados na Matemática Escolar desde a educação infantil. Em particular, 5 (cinco) padrões de processo foram apontados: Resolução de Problemas, Raciocínio e Prova, Comunicação, Conexões e Representação. Acreditamos que a sequência didática aqui proposta, além das conexões já mencionadas, mobiliza os outros 4 padrões de processo.

É possível vincularmos propostas do NCTM (NCTM, 2000) na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017). Dentre as habilidades que o estudante do Ensino Médio precisará desenvolver em matemática, ressaltam-se as relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Na perspectiva do desenvolvimento dessas habilidades, a BNCC enfatiza que os alunos devem: "[...] mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados" (BRAZIL, 2017, p. 529).

Nessa perspectiva, atividades em forma de perguntas, buscando por argumentações dos alunos tentando justificar seus pensamentos, são possibilidades para buscar na comunicação, verbal ou escrita, validar seus raciocínios. Além de colocar o aluno como ativo no processo de ensino, atividades investigativas são promissoras para novos conhecimentos, mobilização de conceitos já aprendidos e, no entanto, fundamentais para aprendizagens significativas.

A seguir são enfatizados alguns pontos fortes da mobilização de conexões em salas de aulas.

1.2.1 Conexões

Para entendermos o significado da expressão "Conexões", no contexto em que se pretende abordá-la, é preciso recorrer à publicação do NCTM (NCTM, 2000), quando apresentou Conexões como um processo matemático essencial que deve ser desenvolvido pelos alunos de qualquer idade, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio.

Canavarro (2017) aborda questões sobre as potencialidades das conexões relativamente à visão dos alunos sobre a Matemática e as relações com outras áreas e a vida real.

> O grande propósito das conexões é que ampliem a compreensão das ideias e dos conceitos que nelas estão envolvidos e, consequentemente, permitam aos alunos dar sentido à Matemática e entender esta disciplina como coerente, articulada e poderosa — em vez de ser perspetivada, como recorrentemente acontece, como uma coleção de regras ad-hoc a aplicar em situações particulares pré-determinadas e sem outra utilidade para além da de passar nos testes (CANAVARRO, 2017, p. 38).

Como possibilidades para efetivar conexões na sala de aula, Allevato e Onuchic (2019) defendem que a Resolução de Problemas se constitui em uma atividade que promove a percepção e a compreensão das conexões. As autoras, a partir de um problema envolvendo volumes de um cubo e de um paralelepípedo, mostram diferentes possibilidades de conexões com diferentes áreas da matemática: Teoria dos Números, Álgebra e Geometria. O problema envolve conexões entre conceitos e procedimentos de cálculo relativos à área e volume, conjuntos numéricos, raízes de polinômios, potenciação, números complexos, ângulos e trigonometria.

Paulin e Ribeiro (2019), ao fazerem uma revisão sistemática da literatura, fizeram algumas reflexões sobre o ensino do Teorema Fundamental do Cálculo, corroborando com a importância das conexões no ensino. O trabalho reforça a importância do conceito de função para a compreensão dos conceitos relacionados ao Teorema Fundamental do Cálculo e aponta para a necessidade de valorizar e priorizar uma prática docente que estabeleça conexões.

Entende-se que as conexões podem mostrar que a matemática é articulada e não uma composição de fatos isolados. Allevato e Onuchic (2019), ao apresentarem as possibilidades de conexões com o problema envolvendo o volume de um cubo e de um paralelepípedo, enfatizam que na Licenciatura, esse problema é útil para que os futuros professores vivenciem a construção de conhecimentos sobre novos conceitos e conteúdos, percebendo a necessidade de resgatar e/ou estabelecer conexões entre conteúdos previamente aprendidos.

2 O PRODUTO EDUCACIONAL

2.1 Tipo de produto: Sequência Didática

2.2 Objetivo: Possibilitar pesquisa em matemática na sala de aula, estabelecendo padrões e conexões com outros conceitos matemáticos na representação geométrica de números reais.

2.3 Público-alvo: Alunos da educação básica, estudantes de Licenciatura em Matemática e professores de matemática da educação básica.

2.4 Nível de escolaridade: Sugerido para alunos do final do ensino médio e ou/estudantes de Licenciatura em Matemática.

2.5 Descrição do produto:

Nessa atividade, será explorada uma representação dos números reais e a partir dessa, buscar conexões com outros conhecimentos matemáticos. É uma atividade que usará lápis, papel e régua.

Bloco 1: Experimentação e formulação de conjecturas

Atividade 1:

a) Desenhe no primeiro quadrante do sistema cartesiano um quadrado de lado l. l pode ter a medida que desejar, tanto racional como irracional. Para simplificar, indicamos que use um l racional e pequeno, não maior que $2\ cm$ (2 centímetros). Calcule o valor da diagonal desse quadrado (pode utilizar o teorema de Pitágoras, por exemplo). Chamaremos essa medida de d_1.

b) Agora, desenhe um quadrado no segundo quadrante. Esse novo quadrado terá a medida do lado igual ao valor encontrado para a diagonal do quadrado do primeiro quadrante, ou seja, d_1 (resultado encontrado na letra a). De forma semelhante ao feito no item a, calcule a diagonal desse novo quadrado. Chamaremos o resultado de d_2.

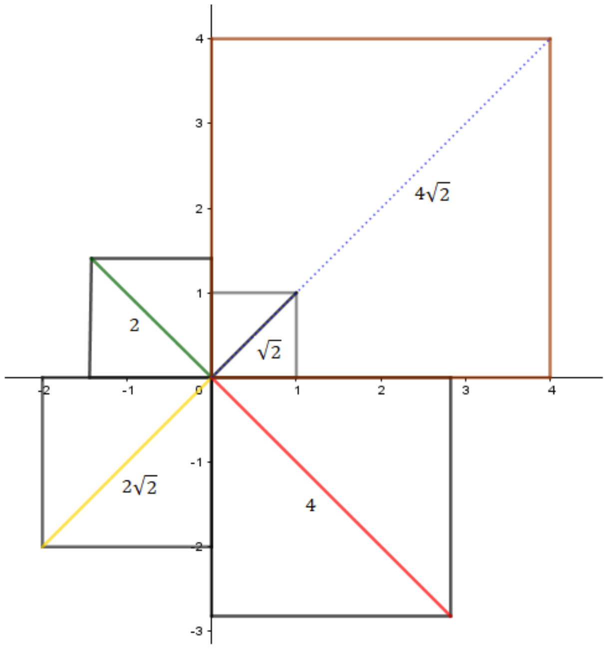
c) Dando sequência, desenhe um quadrado no terceiro quadrante. Esse quadrado deve ter lado igual a diagonal do quadrado do segundo quadrante, d_2. Calcule a diagonal desse novo quadrado. Chamaremos de d_3.

d) No quarto quadrante desenhe um quadrado de lado d_3. Calcule sua diagonal e chame de d_4.

OBS.: Esse processo poderá ser repetido até que os alunos comecem a perceber quais são os próximos d_{is}.

Na figura 1, apresentamos um exemplo, iniciando com $l = 1$ para a medida do lado do primeiro quadrado.

Figura1: Exemplo de construção em que o primeiro quadrado tem lado 1.



Fonte: Autores

Atividade 2:

a) Se colocarmos em uma sequência os valores das diagonais: $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, \ldots$, é possível estabelecer uma função que determine cada elemento dessa sequência? Se sim, qual função? Caso contrário, identificou alguma forma padronizada? Qual?

b) E se escrevermos os elementos das diagonais da seguinte forma: $d_1, d_3, d_5, \ldots$, ou seja, utilizando as diagonais dos quadrantes ímpares. Observa algum padrão nesses números? Qual padrão? Esses números pertencem a qual conjunto numérico? Como você escreveria uma função para encontrar cada elemento dessa sequência?

c) De forma semelhante ao item b, se tomarmos os elementos das diagonais dos quadrados dos quadrantes pares, na forma: $d_2, d_4, d_6, \ldots$. Temos um padrão bem estabelecido? Qual é esse padrão? Podemos escrever uma função cuja imagem é cada um dos elementos dessa sequência?

Atividade 3:

Nessa atividade 3, iremos repetir o processo feito nas atividades 1 e 2. Mas, dessa vez, iniciando com um número de um conjunto numérico diferente do escolhido para iniciar a atividade 1. Ou seja, se você iniciou a atividade com um número racional, a medida l era racional, agora essa medida deve irracional, e vice-versa.

Bloco 2 : Generalização

Atividade 1:

a) A sequencia dos $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, ...$, é uma sequência de números racionais ou irracionais?

b) Existe alguma possibilidade da sequência $d_1, d_3, d_5, ...$, ser uma sequência de números racionais? Se sim, quando isso ocorre, ou por que não é possível?

c) Existe alguma possibilidade da sequência $d_2, d_4, d_6, ...$, ser uma sequência de números racionais? Se sim, quando isso ocorre, ou por que não é possível?

Atividade 2:

a) Repetir o processo feito nas atividades 1 e 2, do bloco 1, utilizando como medida do lado do quadrado inicial, no primeiro quadrante, o valor a. Esse valor é genérico, pode ser racional ou irracional.

b) O que podemos concluir sobre as sequências das diagonais: $d_1, d_3, d_5, ...$ e $d_2, d_4, d_6, ...$? Observa algum padrão, qual? A qual conjunto numérico pertencem os elementos de cada sequência? Qual a função que determina cada termo de cada sequência?

c) Voltar na atividade 1, do bloco 2. Formalizar a conjectura apresentada nela.

2.6 Dinâmica de aplicação: A atividade pode ser aplicada em 4h aula utilizando lápis, papel, régua, e quadro branco para sistematização dos resultados. Os estudantes podem ser organizados em duplas, possibilitando dinamicidade e trocas de saberes. Além disso, é possível realizar as construções geométricas em algum software. Para essa proposta, acreditamos que lápis e papel são suficientes para uma primeira prática.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essas atividades ainda não foram aplicadas em uma turma regular de ensino. Nesse momento ressaltamos a diversas possibilidades de conexões, além dos demais padrões de processos citados pelo NCTM (NCTM, 2000) e ratificados pela BNCC (2017). Enfatizamos a necessidade de propor atividades que possam favorecer a mobilização desses processos e que coloquem o estudante como ativo, em condições de ser protagonista no desenvolvimento de sua aprendizagem.

4 CITAÇÕES/REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática. **REnCiMa**, v. 10, n. 2, p. 01-14, 2019.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

CANAVARRO, A. P. O que a investigação nos diz acerca da aprendizagem da matemática com conexões – ideias da teoria ilustradas com exemplos. **Educação e Matemática**. Lisboa, n. 144-145, p. 38-42, out, nov., dez. 2017.

LAKATOS, I. **A Lógica do descobrimento Matemático: Provas e refutações**. Rio de Janeiro, Zahar, 1978.

NCTM-National Council of Teachers of Mathematics. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston,VA: NCTM, 2000.

PAULIN; J. F. V.; RIBEIRO, A. J. Ensino e Aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo: algumas reflexões a partir de uma revisão sistemática de literatura. **Revista Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.21, n.2, p. 239-263, 2019.