VI MOSTRA GAÚCHA DE PRODUTOS EDUCACIONAIS

01 JULHO DE 2022

PPGECE UNIVATES

FRACTAL HEXAGONAL DO DÜRER: UMA PROPOSTA PARA A SALA DE AULA

Mauricio Ramos Lutz – mauricio.lutz@iffarroupilha.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha
Alegrete - RS
José Carlos Pinto Leivas – leivasjc@ufn.edu.br
Universidade Franciscana
Santa Maria - RS

Resumo: Este trabalho apresenta ao leitor um produto educacional envolvendo o estudo da Geometria Fractal (uma das geometrias não euclidianas), sendo dividido em três atividades: (1) conhecendo, (2) construindo e (3) explorando o Fractal Hexagonal de Dürer. As atividades podem ser utilizadas em diversos níveis de escolaridade, modalidades e realidades educacionais, tendo como objetivo construir o Fractal Hexagonal de Dürer utilizando o *software GeoGebra* para explorar relações geométricas envolvidas em sua construção. O trabalho originou-se da pesquisa de doutorado do primeiro autor, orientada pelo segundo, realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática da Universidade Franciscana (UFN) – Santa Maria/RS. Ao finalizar as atividades esperamos que os estudantes percebam que, quanto maior for o valor de n (n um número natural qualquer), a área total para um nível n, será o menor valor dentre elas, ou seja, para um n tendendo a infinito, a área total tende a zero. Esperamos que esse produto educacional forneça subsídios que auxiliem professores em atividades de sala de aula.

Palavras-chave: Relações geométricas, Geometria Fractal, Fractal Hexagonal de Dürer, *software GeoGebra*, ensino e aprendizagem.

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Fractal é um campo de pesquisa recente na matemática. Considerando a História da Matemática, a Geometria Fractal é um estudo atual, desenvolvido a partir dos meados da década de cinquenta, com a publicação do livro “Os objetos fractais: forma, acaso e dimensão”, em 1975. Segundo Janos (2008, p. 17), a Geometria Fractal “é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza”.

Durante inúmeros séculos, empregamos conceitos relacionados à Geometria Euclidiana para representar objetos matemáticos e modelar elementos da natureza. Essa Geometria, muitas vezes, reproduz de forma satisfatória os objetos criados pelo homem, entretanto, há casos em que não temos uma boa representação ou essa é muito complexa. A partir dessa inquietação, da não representação de vários objetos da natureza pela Geometria Euclidiana, foi desenvolvida a Geometria Fractal pelo matemático Benoit B. Mandelbrot.

A Geometria Fractal, uma das não euclidianas, é uma opção para tais aplicações, pois ela nos possibilita ir além das dimensões inteiras, próprias dos objetos da Geometria Euclidiana. Ela permite-nos ir além dos estudos de quadrados, retângulos, circunferências e outras formas geométricas, dificilmente encontradas na natureza, a saber, em vegetais, em rochas e em rios, que não apresentam, em geral, a dimensão inteira. Segundo Goldenberg (1991, p. 50, tradução nossa), a Geometria Fractal, "[...] tem sido reconhecida como uma ferramenta de modelagem altamente valorizada, aplicável em grande variedade de ciências".

O estudo da Geometria Fractal possibilita ao professor desenvolver diversos conteúdos previstos no currículo do Ensino Médio, por exemplo, tais como funções, logaritmos e progressões, entre outros. Entendemos que apresentar aos estudantes que a matemática tem uma aplicação na própria matemática é algo enriquecedor, pois pode-se mostrar que o fazer matemática não se trata de seguir procedimentos e fórmulas, mas, que vai além disso, permitindo realizar investigação e, consequentemente, a produção do conhecimento.

Para o desenvolvimento das atividades que propomos neste produto educacional, estamos aliando o uso de Tecnologias Digitais (TD), em especial, com a utilização do *software GeoGebra*, e a Geometria Fractal, com o Fractal Hexagonal de Dürer.

O uso das TD deve auxiliar o enriquecimento do ambiente educacional, possibilitando a construção de conhecimentos por meio de uma ação ativa, crítica e criativa, tanto por parte dos estudantes, como dos educadores. Papert (1994) defende o uso do computador por acreditar que ele é mais eficaz no desenvolvimento cognitivo, além de acelerar a passagem do pensamento infantil para o adulto.

A união das TD e da Geometria Fractal poderá favorecer um ambiente de descoberta e discussão se explorados e orientados pelo professor de forma criativa e atrativa. Nosso objetivo é construir o Fractal Hexagonal de Dürer utilizando o *software GeoGebra* para explorar relações geométricas envolvidas em sua construção. Para desenvolver essa união entre um tema específico de geometria com um de tecnologia foi desenvolvida uma sequência de atividades dividida em três momentos: (1) conhecendo, (2) construindo e (3) explorando o Fractal

Hexagonal de Dürer, a qual pode ser proposta, tanto para alunos da Educação Básica quanto par os do Ensino Superior.

O trabalho aqui proposto e apresentado teve origem a partir da pesquisa de doutorado do primeiro autor, orientada pelo segundo e realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática da Universidade Franciscana (UFN) – Santa Maria/RS. Se houver interesse em acessar a tese em sua totalidade a mesma pode ser obtida por meio do link <http://www.tede.ufn.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/903> e pesquise pelo nome do autor ou pelo título “Possibilidade de inserção da Geometria Fractal na licenciatura em Matemática do IFFar”.

2 O PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional apresentado é uma sequência de atividades exploratórias na construção e nas relações geométricas envolvidas no Fractal Hexagonal de Dürer.

2.1 Tipo de produto: Proposta de ensino.

2.2 Objetivo: Construir o Fractal Hexagonal de Dürer utilizando o *software GeoGebra* para explorar relações geométricas envolvidas em sua construção.

2.3 Público-alvo: Estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior.

2.4 Nível de escolaridade: Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior.

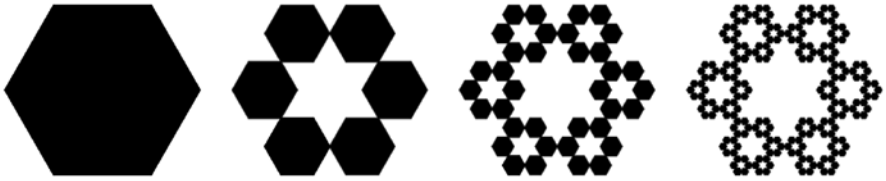
2.5 Descrição do produto: Sequência dividida em três atividades. A primeira é referente à apresentação do histórico e características do Fractal Hexagonal de Dürer; a segunda trata da construção do referido fractal utilizando o *software GeoGebra*; para a terceira atividade destinamos a exploração das relações geométricas envolvidas na construção do Fractal Hexagonal de Dürer.

2.6 Dinâmica de aplicação:

A atividade 1 é expositiva e dialogada com os alunos, sendo apresentado, em um primeiro momento, o histórico e as características do Fractal Hexagonal de Dürer.

O alemão Albrecht Dürer (1471–1528), pintor, ilustrador, matemático e teórico de arte, é o autor dos fractais que levam seu nome (Figura 1). Também é atribuída a Dürer a autoria da construção do desenho do pentágono regular, utilizando apenas régua e compasso. (OLIVEIRA, 2016).

Figura 1 – Fractal Hexagonal de Dürer



Fonte: autoria própria.

Mas afinal, o que é o Fractal Hexagonal de Dürer? Para Barbosa (2005), trata-se de um fractal construído a partir de um hexágono regular, em que, a cada iteração (ou repetição de procedimentos), ocorre a substituição de cada vértice do polígono original por um hexágono regular com o mesmo número de lados, de forma que um de seus ângulos coincida com o ângulo do hexágono regular inicial, tendo a condição de que os hexágonos regulares gerados tenham um vértice em comum.

A atividade 2 é destinada para a construção do Fractal Hexagonal de Dürer, sendo realizada com o auxílio do *software GeoGebra* e, a dividimos em 4 etapas, uma para cada nível.

Com o fim de auxiliar os estudantes no processo, elaboramos um passo a passo desta construção, o qual pode ser acessado no Portal eduCAPES [1] no endereço <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/702074>. Nele poderá ser encontrado o produto educacional em sua integra.

Reservamos para a atividade 3 a exploração das relações geométricas envolvidas no Fractal Hexagonal de Dürer. Para isso, elaboramos uma sequência de questionamentos levando o aluno a conjecturar e a verificar se sua conjectura está correta ou não. Seguem os questionamentos:

a) Qual é o valor da área da região hexagonal obtida no nível 0 (A_0)? Explique como você obteve essa área.

b) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 1 (A_1)? E o valor total, obtido em função de A_0?

c) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 2 (A_2)? E o valor total, obtido em função de A_0?

d) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 3 (A_3)? E o valor total, obtido em função de A_0?

[1] O eduCAPES é um portal de objetos educacionais abertos para uso de alunos e professores da educação básica, superior e pós-graduação que busquem aprimorar seus conhecimentos.

e) A partir das observações, cálculos e explicações feitas nos itens anteriores, preencha o Quadro 1, determinando a medida do lado, o número de hexágonos e a área (em relação a A_0) para um Fractal Hexagonal de Dürer de nível n. Salientamos que n é um número natural genérico.

Quadro 1 - Medida do lado, número de hexágonos e a área (em relação a A_0) para um Fractal Hexagonal de Dürer de nível n.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Lado					...	
Número de hexágonos					...	
Área total em relação a A_0					...	

Fonte: autoria própria.

f) Se pensarmos em um valor de n muito elevado, ou seja, n tendendo a infinito, o que ocorrerá com a área A_n?

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que a prática docente precisa ser pensada com novas abordagens e formas de ensino que culminem na aprendizagem do acadêmico. enquanto o professor não deve se limitar a reprodução de fórmulas a partir de suas aplicações, o estudante necessita ir além da dessa memorização de conceitos e regras. Pensando por esse viés, acreditamos que a manipulação/construção/exploração da figura do Fractal Hexagonal de Dürer, por meio do *software GeoGebra*, proporciona vantagem didática, ou seja, a visualização e manuseio do que está sendo trabalhado oportuniza um aspecto fundamental na Matemática, que é despertar a motivação, o buscar o conhecimento e o aprender. Dessa forma, as aulas podem tornam-se mais dinâmicas, participativas e produtivas, alterando o aspecto estático que, muitas vezes, a disciplina ainda se mantem. Além disso, o 'deixar de lado' ou 'deixar para o fim do ano' as abordagens envolvendo geometria pode sair do cenário educacional. Inclusive, o envolvimento de novos itinerários para o Ensino Médio que estão sendo estudados e, por certo, nesses o aluno deve ser o agente participativo principal nos processos de ensino e de aprendizagem. Portanto, ele mesmo irá criar ideias e descobrir caminhos, obviamente, sempre com a orientação do professor que, portanto, deve ter conhecimento de novos conteúdos e novas abordagens, que muitas vezes não são abordadas na sua formação inicial.

Ao finalizarmos a sequência de atividades explorando as relações geométricas apresentadas no Fractal Hexagonal de Dürer, desejamos que os estudantes reconheçam algumas características que envolvem o referido fractal, por exemplo, relações entre geometria e formas, grandezas e medidas, como preconizados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), uma vez que distinguirá perfeitamente a grandeza medida, relacionada à uma linha poligonal hexagonal, no caso e a grandeza área ao relacionar à região colorida limitada pelo polígono. Em termos gerais, até mesmo em livros didáticos as formas polígono (linha) e região poligonal (região) são confusas ou indistinguidas.

Para os 4 primeiros questionamentos (a), (b), (c) e (d) foi solicitado aos estudantes que desenvolvessem uma fórmula que relacionasse cada nível (0, 1, 2 e 3) de construção com a área inicial (A_0) do Fractal Hexagonal de Dürer.

Estes questionamentos iniciais prepararam os discentes para o quinto questionamento (e) no qual eles teriam de desenvolver uma generalização da fórmula que relacionasse um nível n (n um número natural qualquer) com a área inicial (A_0) do Fractal Hexagonal de Dürer. Isto é, eles deveriam chegar à conclusão de que a área total é dada por $[(2/3)^n.A_0]$.

O último questionamento (f) foi em relação ao que aconteceria com a área total se tivéssemos um valor de n muito elevado (*n* tendendo a infinito). É esperado que, a partir da análise, os estudantes concluam que, quanto maior for o valor de n, menor será o valor da área, ou seja, para um n tendendo a infinito, a área A_n tende a zero.

Acreditamos que a partir de uma sequência de atividades como a sugerida neste produto, podem proporcionar aos professores elementos envolvendo uma das geometrias não euclidianas, a saber, a Geometria Fractal. Essas atividades podem ser utilizadas em diversos níveis de escolaridade, modalidades e realidades educacionais.

4 CITAÇÕES/REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

JANOS, Michel. **Geometria Fractal.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

GOLDENBERG, E. Paul. Seeing beauty in mathematics: Using Fractal Geometry to Build a Spirit of Mathematical Inquiry. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (ed.). **Visualization in teaching an learning mathematics.** Washington, USA: Mathematical Association of America, 1991. p. 67-76.

OLIVEIRA, Genilton José Cavalcante de. **Ensaios fractais à luz do Ensino Médio.** 2016. 144 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016. Disponível em: < https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=628>. Acesso em: 23 set. 2017.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.