ESTUDANDO OS ASPECTOS GEOMÉTRICOS DA CURVA DE PEANO A PARTIR DE SUA CONSTRUÇÃO

José Carlos Pinto Leivas – leivasjc@ufn.edu.br
Universidade Franciscana
Santa Maria – RS
Mauricio Ramos Lutz – mauricio.lutz@iffarroupilha.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha
Alegrete - RS

Resumo: No presente trabalho, apresentamos um produto educacional desenvolvido a parir de uma sequência de atividades, envolvendo o conceito de Geometria Fractal. Foi dividido em três momentos: (1) conhecendo, (2) construindo e (3) explorando a Curva de Peano. Este material foi planejado para ser desenvolvidos com alunos do Ensino Médio e Ensino Superior, tendo como objetivo a construção da Curva de Peano utilizando o *software GeoGebra* a fim de explorar relações geométricas envolvidas em seu processo de construção. Ao final das atividades é esperado que os estudantes percebam que a área gerada em um quadrado de nível n (n um número natural qualquer) é dada por $(l^2/9^n)$. Além disso, a soma dos comprimentos dos segmentos tenderá a um valor muito grande ao infinito) conforme formos aumentando o valor de n. Espera-se que os estudantes cheguem à conclusão que quando n for muito elevado, o valor da área da superfície da figura formada tende a ser a área de um quadrado, pois essa figura geométrica está sendo preenchida por quadrados cada vez menores. Desejamos que essa proposta possa auxiliar professores em suas atividades de sala de aula.

Palavras-chave: Relações geométricas, Geometria Fractal, Curva de Peano, *software GeoGebra*, Ensino e aprendizagem.

1 INTRODUÇÃO

Na atualidade, as transformações sociais requerem mudanças, também nos contextos escolares, porque as informações estão cada vez mais acessíveis aos estudantes, seja por meio do computador, do celular ou do *tablet*, dentre outras ferramentas de comunicação. Nesse universo, não há fronteiras nem portas fechadas, tudo acontece na mesma hora, em qualquer lugar, bastando passar o dedo na tela ou no teclado. Dessa forma, a popularização das Tecnologias Digitais (TD) oferece ao educador a possibilidade de procurar recursos e maneiras diferenciadas de ensinar, as quais forneçam auxílio em sua prática pedagógica, como a inserção do uso do computador em sala de aula.

Mesmo não estando nos currículos escolares, a Geometria Fractal, uma das geometrias não euclidianas, pode ser explorada em sala de aula aliada ao uso do computador, desenvolvendo uma geometria mais próxima da rotina dos educandos. Essa ideia, relatada por Rabay (2013, p. 101), indica que "o uso de fractais em sala de aula provoca a quebra de paradigma que a matemática é uma ciência pronta". Além disso, possui "[...] aplicações práticas e de fácil compreensão, e reconhecida a semelhança com diversos elementos da própria natureza, mostra que a matemática que é estudada é aplicável". (Ibidem, p. 101).

A partir do exposto, planejamos um produto educacional que aliasse o estudo da Geometria Fractal com o uso das TD, neste caso o *software GeoGebra*. Entretanto, para desenvolver essa ligação foi desenvolvida uma sequência de atividades, as quais foram divididas em três momentos: (1) conhecendo, (2) construindo e (3) explorando a Curva de Peano. Tais atividades foram propostas para alunos do Ensino Médio e do Ensino Superior. Teve como objetivo a construção da Curva de Peano utilizando o *software GeoGebra* a fim de explorar relações geométricas envolvidas em seu processo de construção.

Gostaríamos de destacar que este trabalho originou-se a partir da pesquisa de doutorado de Maurício Ramos Lutz, orientada por José Carlos Pinto Leivas e realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática da Universidade Franciscana (UFN) – Santa Maria/RS. Para obter a tese na integra acesse o link <http://www.tede.ufn.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/903> e pesquise pelo nome do autor ou pelo título "Possibilidade de inserção da Geometria Fractal na licenciatura em Matemática do IFFar".

2 O PRODUTO EDUCACIONAL

O produto educacional apresentado é uma sequência de atividades exploratórias na construção e nas relações geométricas envolvidas na Curva de Peano, como descrito a seguir.

2.1 Tipo de produto: Proposta de ensino.

2.2 Objetivo: : Construir a Curva de Peano utilizando o *software GeoGebra* e explorar relações geométricas envolvidas em seu processo de construção.

2.3 Público-alvo: Estudantes do Ensino Médio e do Ensino Superior.

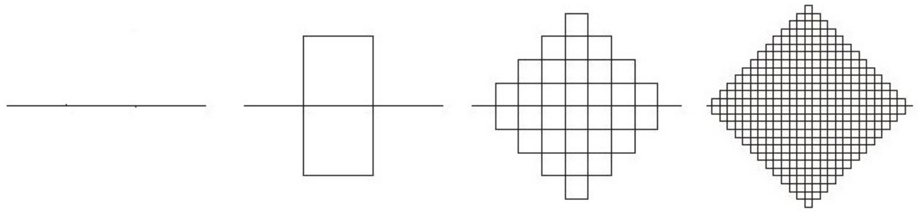
2.4 Nível de escolaridade: Ensino Médio e Ensino Superior.

2.5 Descrição do produto: Sequência dividida em três atividade. A primeira é referente a apresentação do histórico e características da Curva de Peano; a segunda trata da construção do referido fractal utilizando o *software GeoGebra e* a terceira atividade destinamos à exploração das relações geométricas envolvidas durante o processo de construção.

2.6 Dinâmica de aplicação:

A atividade 1 é expositiva e dialogada com os alunos, sendo apresentado, em um primeiro momento, o histórico e as características da Curva de Peano.
O matemático italiano Giuseppe Peano (1858–1932) publicou em 1890 um estudo aprofundado das noções de continuidade e dimensões, no qual relata a curva que leva seu nome. Nesse estudo, ele prometia cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular por meio de uma curva. (BARBOSA, 2005), Figura 1.

Figura 1 – Curva de Peano



Fonte: autoria própria.

Na construção da Curva de Peano empregamos o processo iterativo. Para tanto, utilizamos a construção conforme os trabalhos de Coelho (2015) e Iwai (2015). Para iniciá-la, tomemos um segmento de reta de comprimento unitário. Dividimos esse segmento em três partes congruentes. No central, desenhamos um retângulo, que é dividido pelo segmento inicial em dois quadrados congruentes. Ao final dessa primeira iteração, obtemos 9 segmentos, cada um com comprimento 1/3 do original. Para a segunda iteração, repetimos os passos anteriores, obtendo 81 segmentos de comprimento, agora com 1/81 do primeiro. Continuando esse processo de iteração n vezes, teremos 9^n segmentos com comprimento $1/3^n$ do que deu origem ao processo.

A atividade 2 é destinada para a construção da Curva de Peano sendo realizada com o auxílio do *software GeoGebra* e a dividimos em 4 etapas, uma para cada nível.

Para auxiliar os estudantes elaboramos um passo a passo desta construção, o qual pode ser acessado no Portal eduCAPES [1] no endereço <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/702073>. Nele encontra-se o produto educacional em sua integra.

Destinamos para a atividade 3 a exploração das relações geométricas envolvidas na construção da Curva de Peano. Para tanto, optamos em fazer uma sequência de questionamentos levando o aluno a conjecturar e a verificar se sua conjectura está correta ou não. Seguem os questionamentos:

a) A partir da construção da Curva de Peano, analisar e preencher o Quadro 1, determinando a medida do lado e o número de segmentos gerados em cada nível até chegar ao n, em que n é um número natural qualquer.

Quadro 1 - Medida do lado e número de segmentos gerados na Curva de Peano de no nível n

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Lado					...	
Número de segmentos					...	
Área de cada quadrado gerado					...	

Fonte: autoria própria.

b) Se pensar em um valor para n muito elevado, ou seja, n tendendo a infinito, o que ocorrerá com a soma do comprimento dos segmentos, isto é, S_n?

A soma dos comprimentos dos segmentos na Curva de Peano é dada pelo número de segmentos multiplicado pela medida de cada um deles. Para melhor organização, analisar e preencher o Quadro 2.

Quadro 2 – Soma dos comprimentos dos segmentos na Curva de Peano

[1] O eduCAPES é um portal de objetos educacionais abertos para uso de alunos e professores da educação básica, superior e pós-graduação que busquem aprimorar seus conhecimentos.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Soma dos segmentos					...	

Fonte: autoria própria.

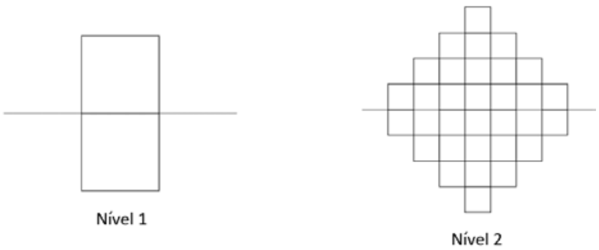
c) Com base na Figura 2, o que você observa que ocorre na passagem da construção do nível 0 para o nível 1?

Figura 2 – Curva de Peano nível 0 e nível 1

Fonte: autoria própria.

d) Com base na Figura 3, o que você observa ocorrer na passagem da construção do nível 1 para o nível 2?

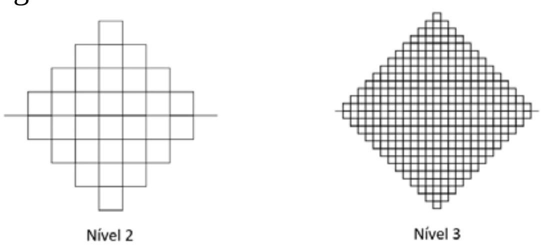
Figura 3 – Curva de Peano nível 1 e nível 2



Fonte: autoria própria.

e) Com base na Figura 4, o que você observa ocorrer na passagem da construção do nível 2 para o nível 3?

Figura 16 – Curva de Peano nível 2 e nível 3



Fonte: autoria própria.

f) Se continuar as iterações até chegar a um nível n, em que n é um valor muito elevado (tendendo a infinito), o que é possível conjecturar a respeito da área da superfície formada nessa iteração?

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao findar a sequência de atividades, esperamos que os estudantes percebam algumas características que envolvem a Curva de Peano.

Para o primeiro questionamento (a) referente ao número de segmentos e à área gerada em cada quadrado, ou seja, os estudantes, deveriam observar e registrar suas constatações desde o nível 0 até chegar ao nível n, em que n é um número natural qualquer. Era desejável que eles chegassem à conclusão de que a área gerada em um quadrado de nível n é dado por ($l^2/9^n$).

O segundo (b) referente a soma dos comprimentos dos segmentos na Curva de Peano, desde um nível 0 até chegar ao nível n (n um número natural qualquer). É esperado que os estudantes percebam que, conforme aumentar o valor de n, também os valores serão cada vez mais elevados para a soma dos comprimentos dos segmentos, ou seja, a soma tenderá a um valor muito grande (infinito). Pode ser aproveitada essa situação para desenvolver o conceito de infinito com os alunos do Ensino Médio.

Para o terceiro (c), quarto (d) e quinto (e) era para explorar, a partir da análise das figuras. o que acontece com o número de segmentos e o número de quadrados gerados na Curva de Peano entre o nível 0 e o 1; entre o nível 1 e o 2 e entre o nível 2 e o 3, respectivamente. Gostaríamos que os estudantes chegassem à conclusão de que o nível 0 possui um segmento de reta cujo comprimento mede L unidades; o nível 1 possui 2 quadrados de lados medindo L/3 cada um; no nível 2 possui 32 quadrados de lados medindo L/9; no nível 3 possui 338 quadrados de lados medindo L/27.

O último questionamento (f) foi em relação à área da superfície formada a partir da continuação das iterações até chegara um nível n, em que n é um valor muito elevado (n tendendo a infinito). Esperamos que os estudantes chegassem à conclusão de que, quando n for muito elevado, o valor da área da superfície tende a ser a área de um quadrado, pois essa figura geométrica está sendo preenchida cada vez por quadrados menores.

Gostaríamos de salientar que as construções e as análises aqui propostas poderiam ser realizadas com a utilização de régua e compasso. Entretanto, com o auxílio do uso da tecnologia, neste caso com o *software GeoGebra*, esse processo de construção torna-se simples e viável de ser realizado com estudantes do Ensino Médio e do Ensino Superior, além de estimular os estudantes a estudarem a Geometria Fractal, ou seja, uma outra geometria além da Euclidiana.

4 CITAÇÕES/REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

COELHO, João Batista. **Geometria Fractal:** Um olhar sobre a necessidade de inclusão na estrutura curricular do Ensino Médio. 2015. 80 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=81594>. Acesso em: 23 set. 2017.

IWAI, Marceli Megumi Hamazi. **Geometria Fractal.** 2015. 86 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=85308>. Acesso em: 23 set. 2017.

RABAY, Yara Silvia Freire. **Estudo e aplicações da Geometria Fractal.** 2013. 103 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Paraíba, João Pessoa, 2013. Disponível em: <http://tede.biblioteca.ufpb.br/handle/tede/7651#preview-link0>. Acesso em: 23 set. 2017.