

## UM MODELO DE ESPAÇO TRIDIMENSIONAL DESENVOLVIDO EM MANUFATURA ADITIVA

**Leonam Vieira Hemann** – lhemann@ufn.edu.br  
Universidade Franciscana

Santa Maria - Rio Grande do Sul

**Lucas Linke Nunes** – lucas\_linke@hotmail.com

Universidade Franciscana

Santa Maria - Rio Grande do Sul

**Laura Tiemme de Castro** – laucaastro@gmail.com

Universidade Franciscana

Santa Maria - Rio Grande do Sul

**Fernando Mariano Bayer** – bayer.ctism@gmail.com

Universidade Federal de Santa Maria

Santa Maria – Rio Grande do Sul

**José Carlos Pinto Leivas** – leivasjc@ufn.edu.br

Universidade Franciscana

Santa Maria - Rio Grande do Sul

**Resumo:** Tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior a Geometria é voltada para a memorização de fórmulas e, muitas vezes, sem que o aluno compreenda a formação desse conhecimento. A visualização auxilia nesse processo na medida em que o estudante consegue transformar seus conhecimentos prévios em imagens mentais sobre determinado assunto. Além de figuras e representadas no quadro e em *softwares*, os materiais manipuláveis podem auxiliar na compreensão de determinados conceitos geométricos. Porém, isso é algo que, com o avanço do ano escolar, passa a ser menos utilizado. Pensando nisso, apresentamos aqui um material interativo construído a partir de uma impressora 3D, que consiste em um espaço cartesiano com as três dimensões para a compreensão de posicionamento de pontos no espaço. Nosso objetivo com esse produto é possibilitar o processo de visualização por parte dos estudantes na construção da localização de pontos em três dimensões que, normalmente, é trabalhado a partir de imagens estáticas em livros didáticos ou em representações no quadro. Após a aplicação, em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio da rede estadual do Rio Grande do Sul, percebemos que esse produto também pode ser utilizado, a partir de algumas mudanças, para desenvolver conteúdos como vetores no plano e suas relações sendo ~~um produto~~ que poderá ser utilizado tanto no Ensino Básico como no Superior.

**Palavras-chave:** Geometria Analítica, Espaço cartesiano, Impressão 3D.

## **1. INTRODUÇÃO**

Os softwares de Geometria Dinâmica possibilitam a visualização em três dimensões de uma maneira mais interativa do que somente através da observação de uma imagem estática em livros didáticos. Apesar dessas ferramentas, a Geometria ainda é trabalhada na Educação Básica voltada para a memorização de fórmulas sem um enfoque para atividades que auxiliem o desenvolvimento de habilidades de visualização (MATHIAS e SIMAS, 2021).

Apesar do incentivo à utilização de ferramentas digitais no ensino de Geometria, tanto para a Educação Básica quanto para a Superior, Lowrie, Logan e Ramful (2017) observam que, para alguns estudantes, a visualização através de figuras ou em softwares, ainda pode ser um processo difícil. Com isso é necessária a utilização de diferentes materiais, incluindo físicos, para auxiliar no processo de aprendizagem.

Essa dificuldade é apresentada em Bettin, Leivas e Mathias (2020), em que alunos de pós-graduação em ensino de Matemática demonstraram dificuldades em resolver um problema proposto utilizando somente a visualização em conjunto com a imaginação e, em seguida, com o recurso do desenho. Os autores também afirmam que a utilização de material concreto auxiliou o grupo a levantar e comprovar hipóteses sobre o tema trabalhado.

Assim, a proposta deste produto educacional é ser um material físico para o auxílio no processo de visualização da localização do ponto em três dimensões voltado para alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental. A proposta originou-se das discussões sobre o conteúdo na disciplina de Fundamental de Álgebra Linear e Geometria Analítica do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIMAT) da Universidade Franciscana (UFN).

## **2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Neste trabalho, apresentamos uma sugestão de aplicação de um recurso didático que pode ser explorado no Ensino Médio para o ensino de Geometria Analítica explorando, especialmente, visualização geométrica. Leivas (2009) compreende o processo de visualização como o constructo mental que o sujeito tem sobre determinado assunto. Para o autor, “visualização é um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (p.111).

Cifuentes e Santos (2019) afirmam que a visualização, quando associada a conceitos geométricos, é uma possibilidade para alcançar os conhecimentos algébricos sendo também um grande mecanismo para que se perceba a veracidade de um resultado matemático. Um exemplo são os conceitos da Geometria Analítica que, devido a sua complexidade, são desenvolvidos na forma algébrica. Porém, a visualização é uma parte importante para que o estudante compreenda o significado geométrico dos conceitos para além do algébrico.

Materiais concretos são aliados para o processo de visualização em Matemática. Eles possibilitam a experiência matemática que, aliada à visualização, permite a compreensão do processo de movimentação das imagens mentais até o conteúdo final (CIFUENTES e SANTOS, 2019). Apesar disso, poucos recursos didáticos são empregados no que diz respeito ao trabalho com a temática da Geometria Analítica.

Atualmente, existe a possibilidade de utilizar a impressão 3D para construir materiais concretos que possam ser usados como potencializadores de aprendizagem. Essa tecnologia de impressão também é chamada de tecnologia de manufatura aditiva (TMA). Conforme Gibson *et.al* (2021), a impressão 3D surgiu no início dos anos 80. No entanto, foi apenas em 2010 que fabricantes de impressoras 3D começaram a produzir máquinas denominadas de mesa, que são destinadas ao uso individual, em vez de fins industriais, médicos ou inteiramente experimentais (GRACE, 2014). Ter uma impressora compacta que coubesse em uma mesa abriu um novo leque de possibilidades para uma ampla gama de indústrias, incluindo a educacional. O potencial educacional da TMA está sendo cada vez mais reconhecido por educadores e pesquisadores e a acessibilidade, juntamente com a simplicidade de uso, tornou isso uma possibilidade real.

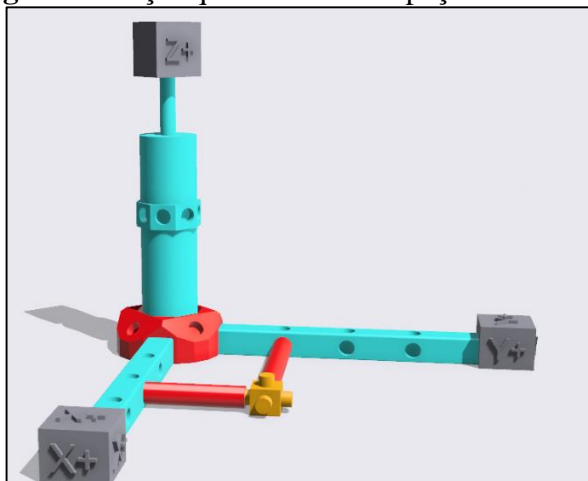
Em particular, tratando-se da disciplina de Matemática, a TMA pode auxiliar no desenvolvimento de habilidades de visualização espacial, além de dar significado a alguns problemas matemáticos (SUN e LI, 2017). Alguns exemplos de integração da tecnologia com o ensino são encontrados na literatura, quando docentes começaram a usar a impressão 3D para simular formas e processos matemáticos em suas salas de aula (CARREIRA; BAIÓIA, 2015). Lieban e Lavicza (2019) apontam que os professores têm um papel fundamental nos processos de ensino e aprendizagem e no uso dessas tecnologias. Segundo os autores, é possível aplicar as habilidades e conhecimentos adquiridos pelos estudantes em contextos fora da escola. Porém, na maioria das vezes, as conexões fora do ambiente escolar não são reconhecidas e a Matemática é considerada fora do alcance na vida real. Observa-se com isso que algumas situações precisam ser estimuladas ou elaboradas tornando-as aparentes para os alunos.

### 3. O PRODUTO EDUCACIONAL

O presente produto educacional consiste em um material interativo formado por um *kit* de peças que estruturam um espaço tridimensional. Esse material inicialmente foi pensado para alunos do terceiro ano do Ensino Médio e tem por objetivo auxiliar no processo de visualização da localização de um ponto no espaço tridimensional, bem como o sistema de coordenadas cartesianas.

O mesmo foi construído utilizando o *software* de modelagem *Shapr 3D*, que disponibiliza uma versão gratuita para estudante, possibilitando assim a modelagem para a construção utilizando uma impressora 3D. A Imagem 1, apresenta a construção realizada no *software*, que mostra o espaço tridimensional através dos eixos x, y e z, esses representados pelos vetores em azul, a origem representada pelo objeto central em vermelho, a orientação dos eixos apresentada por peças em cinza (X+, Y+ e Z+)

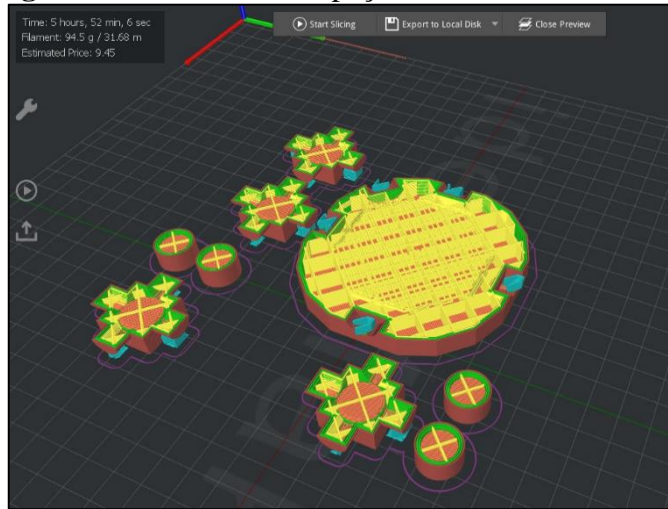
**Imagem 1** - Peças que formam o espaço tridimensional



**Fonte:** acervo pessoal

Após a construção da peça, a mesma passa por um processo de fatiamento. No caso, utilizamos o software *IdeiaMaker* para gerar o arquivo que será usado pela impressora para criar a peça final. Tal processo permite estipular o tempo gasto na impressão e a quantidade de material utilizado, como ilustra a Imagem 2.

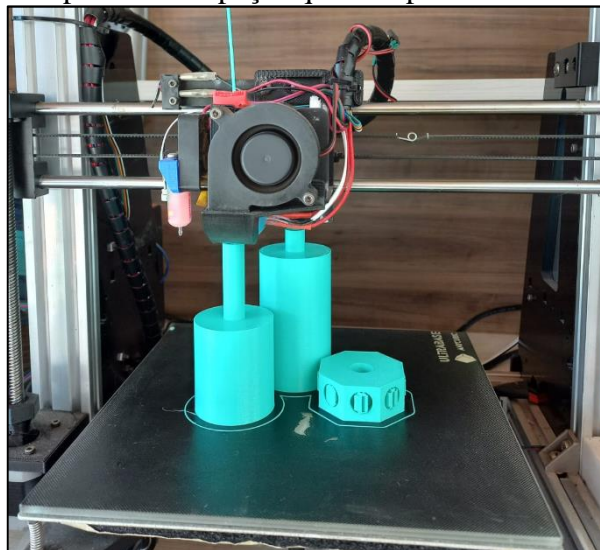
## Imagem 2 - Fatiamento das peças no software IdeiaMaker



Fonte: acervo pessoal

O próximo passo que realizamos foi a impressão da peça, realizada em uma impressora 3D de mesa. Esse processo requer apenas um monitoramento para garantir que não falte material durante a impressão, que não ocorra nenhuma falha decorrente das falhas de energia ou diante de falhas do próprio *software* de fatiamento. A Imagem 3 ilustra um momento do processo de impressão da peça.

## Imagem 3 - Impressão das peças que compõem o material produzido



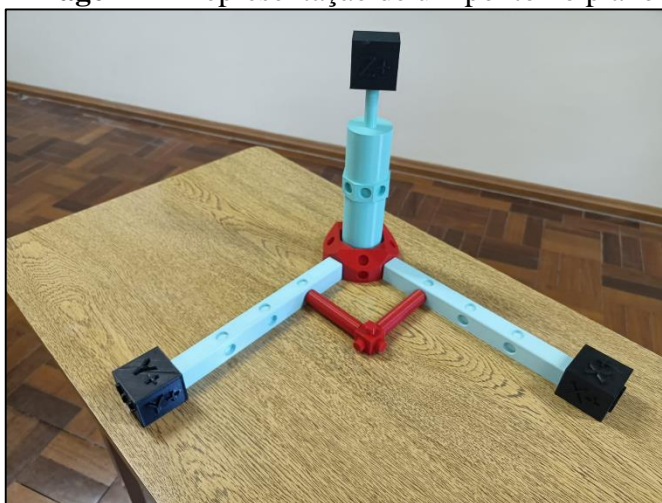
Fonte: acervo pessoal

Observamos, que a impressão foi realizada em quatro etapas, visto que o produto possui vários componentes. Algumas dessas peças são os pinos, que servem como guia para a localização de pontos no plano, no espaço e nos eixos. Entre eles, existem pinos de tamanhos fixos e outros em que é possível um ajuste milimétrico. Os pontos nos planos coordenados são representados por um cubo de encaixe (cubo laranja da Imagem 1).

Por ser um material para auxiliar visualização de pontos no espaço tridimensional, os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  são constituídos por até três unidades de medida, representados pelos orifícios para encaixe. Para facilitar o manuseio, considerou-se apenas o sentido positivo do eixo  $Oz$ . Caso seja haja interesse, pode-se realizar uma rotação dos eixos coordenados de modo que o eixo  $Oz$  também tenha o sentido negativo e um dos outros eixos passe a ter somente o sentido positivo.

Para utilização do *kit*, recomendamos que o professor inicie com a representação de um ponto no plano cartesiano (Imagem 4).

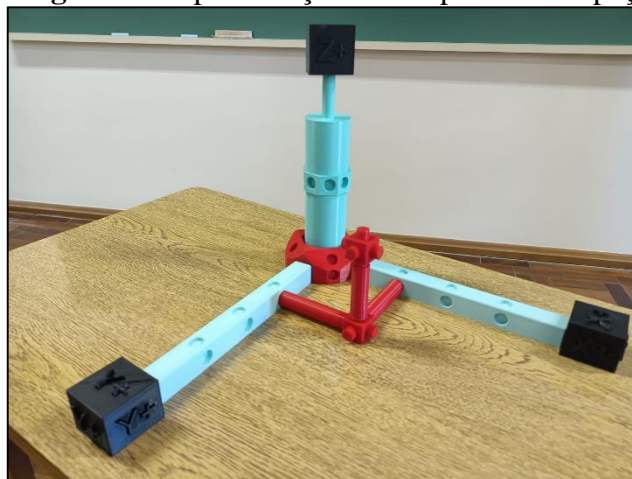
**Imagem 4** - Representação de um ponto no plano



Fonte: acervo pessoal

Posteriormente, conduzir uma perpendicular deste ponto a uma distância correspondente a cota do ponto a ser representada (Imagem 5). Com isso, temos as três componentes do ponto materializadas.

**Imagem 5** - Representação de um ponto no Espaço



Fonte: arquivo pessoal

Segundo Del Grande (1994), esta atividade desenvolve, por exemplo, habilidades de coordenação visual-motora que são relevantes para o desenvolvimento do conhecimento matemático geométrico.

Por fim, está disponível no link: <https://youtu.be/9kEfFIAJBbM> um vídeo apresentando as peças do kit, assim como uma exemplificação de obtenção de um ponto no espaço.

#### **4. RELATO DE APLICAÇÃO E PRINCIPAIS RESULTADOS**

Devido a demanda de tempo, somente os eixos positivos foram impressos. Sendo assim, o material foi aplicado em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual do Rio Grande do Sul, localizada na cidade de Santa Maria - RS.

Para a aplicação, os estudantes foram divididos em grupos de 3 integrantes sendo que a dinâmica teve duração de 2 períodos. No primeiro momento, o professor realizou a explicação da localização do ponto no espaço a partir de representações no quadro e realizando alguns exercícios dessa forma. Em seguida, nos grupos, apresentou o espaço tridimensional em 3D impresso para os alunos e pediu para que os mesmos posicionassem os eixos OX, OY e OZ conforme o desenho do quadro. Também foi solicitado que os estudantes posicionassem o ponto (2,1,1) no modelo impresso.

Durante a montagem do espaço foi possível perceber que os alunos não haviam compreendido, somente com o desenho, que os eixos são ortogonais entre si, pois posicionaram o eixo OY formando um ângulo de  $45^\circ$  com a peça que representa a origem. Além disso, ao realizarem o processo de localização do ponto em questão os estudantes traçaram uma diagonal entre os pontos (1,0,0) e (0,1,0) mostrando que não haviam compreendido a necessidade de se localizar as projeções desses valores no plano.

Após a explicação do professor, sobre os erros de montagem cometidos pelos alunos, os mesmos demonstraram que o espaço tridimensional impresso em 3D auxiliou no processo de visualização da obtenção de um ponto no espaço. Os estudantes também relataram que as diferentes cores auxiliaram nesse processo, devido ao fato de conseguirem diferenciar as projeções dos eixos.



## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em virtude das dificuldades dos alunos em visualizarem as representações no espaço tridimensional, o presente trabalho estimulou o desenvolvimento desta habilidade (LEIVAS, 2009). Na medida em que os alunos possam manusear o material concreto podem conseguir formar concepções mentais sobre temas importantes para a Geometria Analítica e a Álgebra Linear.

Muito embora, na atualidade, a impressora 3D e material associado não sejam utilizados com frequência no âmbito escolar, percebemos que há uma tendência de facilitação de aquisição de tais recursos mediante as oportunidades que surgem de elaboração de projetos voltados a inovações para o âmbito escolar. A obtenção de tais recursos torna-se viável, como exemplificam Wrzesinski et. al (2022), em parcerias efetuadas entre instituições universitárias e escolas.

Como observado na aplicação, o material facilitou a compreensão dos estudantes sobre projeções de pontos sobre os planos cartesianos e sobre os eixos coordenados. A partir disso, notamos que algumas melhorias devem ser feitas, como, por exemplo, imprimir em cor diferente a peça que representa o ponto no espaço e ajustar o encaixe das peças.

Além disso, foi possível perceber que o material pode ser utilizado junto a alunos do primeiro ano do Ensino Médio ao trabalhar a localização de pontos no plano cartesiano e também utilizá-lo como auxílio para alunos com deficiência visual. Há a intencionalidade de dar continuidade ao trabalho na elaboração de material similar para a exploração de vetores no espaço e a respectiva álgebra vetorial voltada para a formação de professores de Matemática no Ensino Superior.

## 6. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## 7. REFERÊNCIAS

CARREIRA, S.; BAIÓIA, A. M. Assessing the best staircase: students' modelling based on experimentation with real objects. In: **CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. 2015. p. 834-840.



CIFUENTES, J. C.; SANTOS, A. H. dos. Da percepção à imaginação: aspectos epistemológicos e ontológicos da visualização em matemática. **Revista Educere Et Educare**, Cascavel, v. 14, n. 33, p. 1-21, set/dez. 2019. Disponível em: < <https://e-revista.unioeste.br/index.php/educereeteducare/issue/view/Dossi%C3%AA%3A%20Filosofia%20da%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20Ma> >. Acesso em: 18 mar. 2022.

DEL GRANDE, J. J. Percepção espacial e geometria primária. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994. p. 156-167.

BETTIN, A. D. H.; LEIVAS, J. C. P.; MATHIAS, C. V. Uma conexão geométrica: imagens mentais, visualização e registros matemáticos. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, Belém, v. 16, n. 36, p. 114-127, jul. 2020. ISSN 2317-5125. Disponível em: <<https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/7301/6323>>. Acesso em: 05 maio 2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v16i36.7301>.

GIBSON, I.; ROSEN, D.; STUCKER, B.; KHORASANI, M. **Additive manufacturing technologies**. Cham, Switzerland: Springer, 2021.

GRACE, J. The end of post-sale confusion: How consumer 3D printing will diminish the function of trademarks. **Harv. JL & Tech.**, v. 28, p. 263, 2014.

LEIVAS, J.C.P. **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de Matemática**. Tese (Doutorado em Educação). UFPR. Curitiba: 2009, 294 p.

LOWRIE, T., LOGAN, T., RAMFUL, A. Visuospatial training improves elementary students' mathematics performance. **British Journal of Educational Psychology**, v. 87, n. 2, p. 170-186, 2017.

LIEBAN, D.; LAVICZA, Z. Dissecting a cube as a teaching strategy for enhancing students' spatial reasoning: Combining physical and digital resources. In: Proceedings of **Bridges 2019: Mathematics, Art, Music, Architecture, Education, Culture**. 2019a. p. 319-326.

MATHIAS, C. V.; SIMAS, F. L. B. Tarefas de Visualização em Exercícios de Geometria Espacial. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 2, n. 22, 2021

WRZESINSKI, A. P.; GARIBALDI, E. P.; MATHIAS, C. V.; BAYER, F. M. Construção de materiais didáticos utilizando ferramentas de modelagem 3D. **37ª Jornada Acadêmica Integrada da Universidade Federal de Santa Maria**. Santa Maria, 2022.